

Istituto di Istruzione Superiore  
**Della Corte - Vanvitelli** - Cava de' Tirreni (Sa)

il giorno 31 marzo 2017

Presenta

“IL METODO DELLE SUPERFICI FUNICOLARI  
PER L'ANALISI DELLE VOLTE SOTTILI E DELLE SCALE IN MURATURA”

Relatore

Prof. Ing. Luciano Rosati “Università degli Studi di Napoli “Federico II”  
presso l'Auditorium IIS Della Corte-Vanvitelli di Cava de' Tirreni (SA)



C.I.Be.C.



**D.I.ST.** – Dipartimento di Ingegneria Strutturale

**C.I.Be.C.** – Centro Interdipartimentale di Ingegneria per i Beni Culturali

## **Analisi di Archi e Volte in Muratura Mediante Metodi Grafici ed Analitici**

Prof. Luciano **ROSATI**

*Cava dei Tirreni – 31 Marzo 2017*

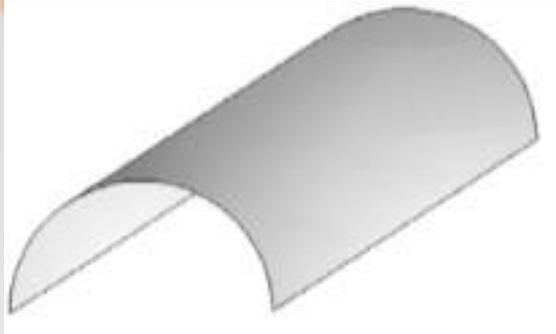


L'analisi degli archi e delle volte in muratura rappresenta indubbiamente uno degli argomenti più interessanti in ambito strutturale, soprattutto per le applicazioni rivolte ai Beni Culturali

Negli **anni**, sono stati sviluppati numerosi metodi per la risoluzione di tali tipologie strutturali

In questa presentazione si illustreranno alcune tipologie di volte, verranno fatti dei richiami sui poligoni funicolari e dei cenni al metodo grafico (Mery) per la risoluzione degli archi in muratura.

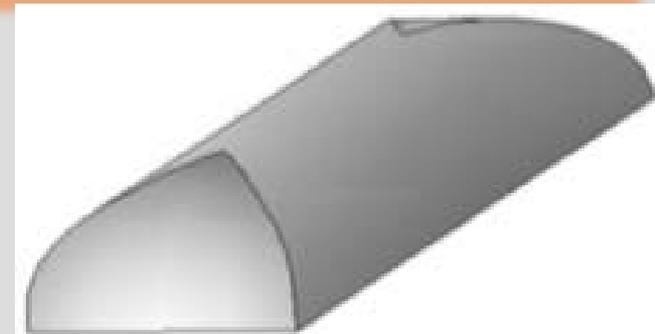
# Tassonomia delle volte



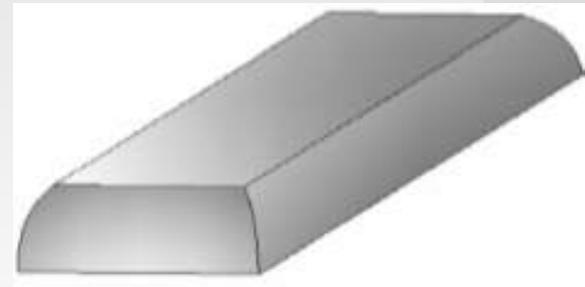
**Volta a Botte**



**Volta a Botte con Lunette**



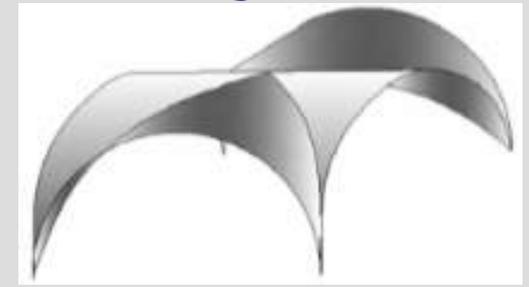
**Volta a Botte con Teste di Padiglione**



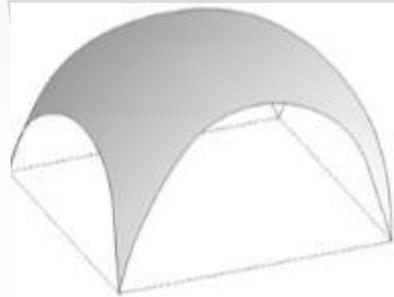
**Volta a Schifo**



**Volta a Padiglione**



**Volta a Crociera**



**Volta a Vela**

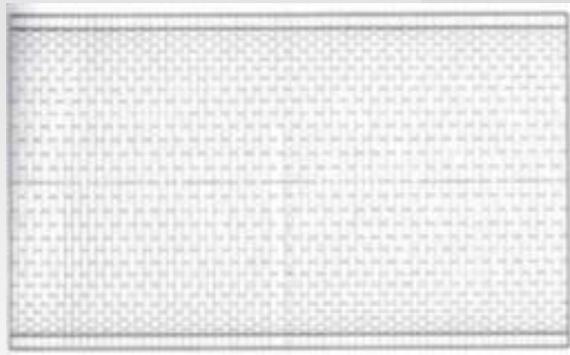


**Volta ad Imbuto**

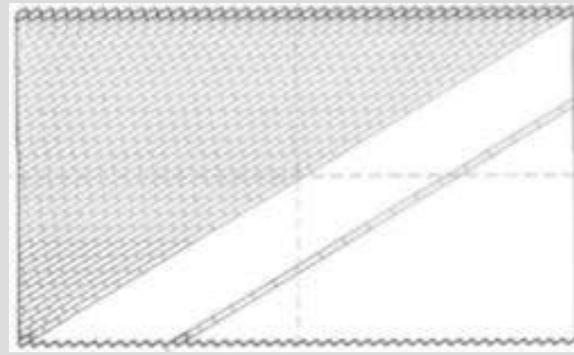
# Apparecchiatura Muraria

Apparecchi per volte in mattoni : i mattoni vengono disposti in filari che seguono il profilo della volta secondo una spezzata

## Volta a Botte



**A filari secondo la direttrice**



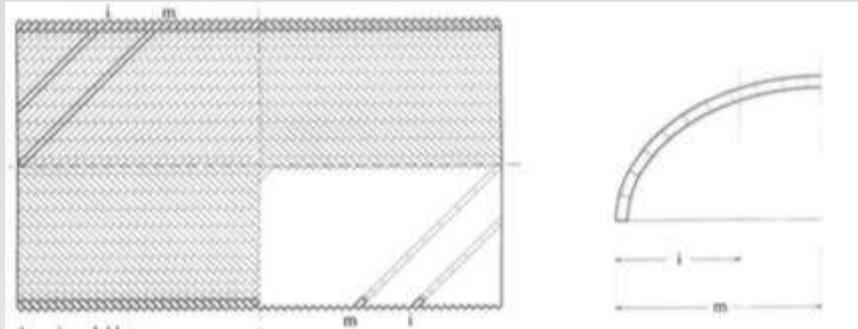
**A filari secondo la diagonale**



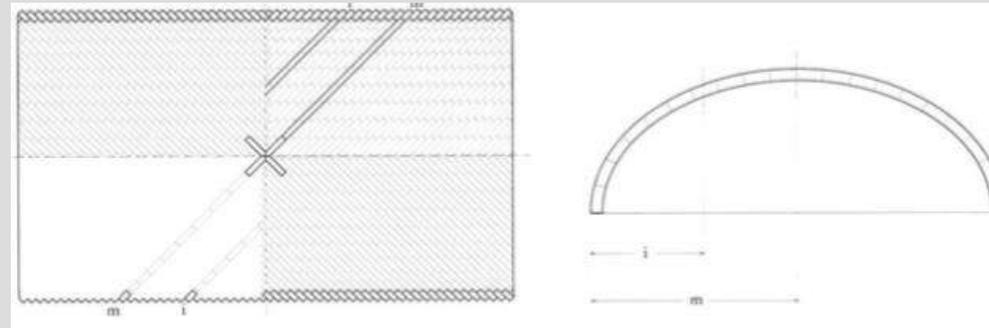
**A filari rettilinei**



## Volta a Botte



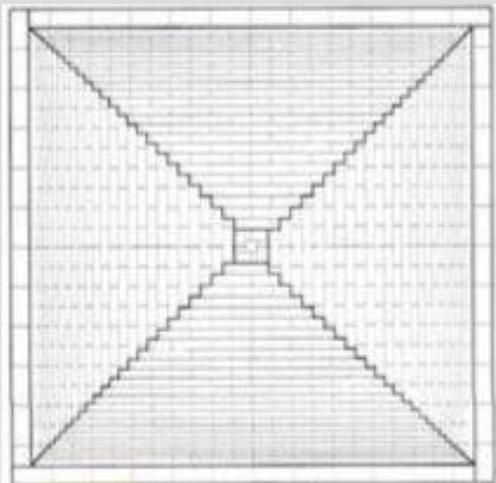
**A spina di pesce (inclinazione  $45^\circ$ )**



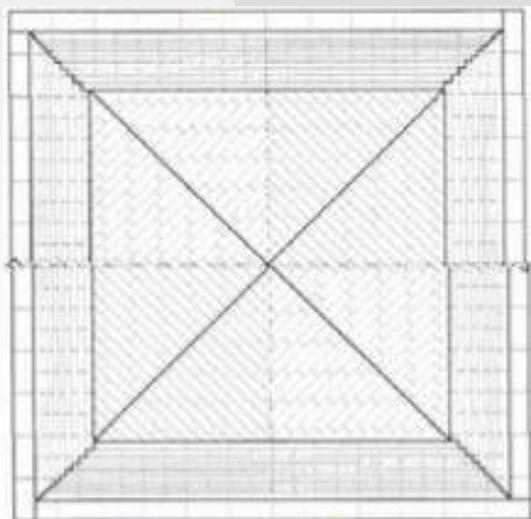
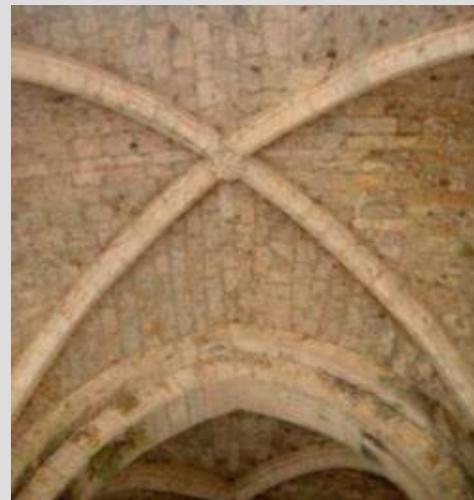
**A coda di rondine (inclinazione  $45^\circ$ )**



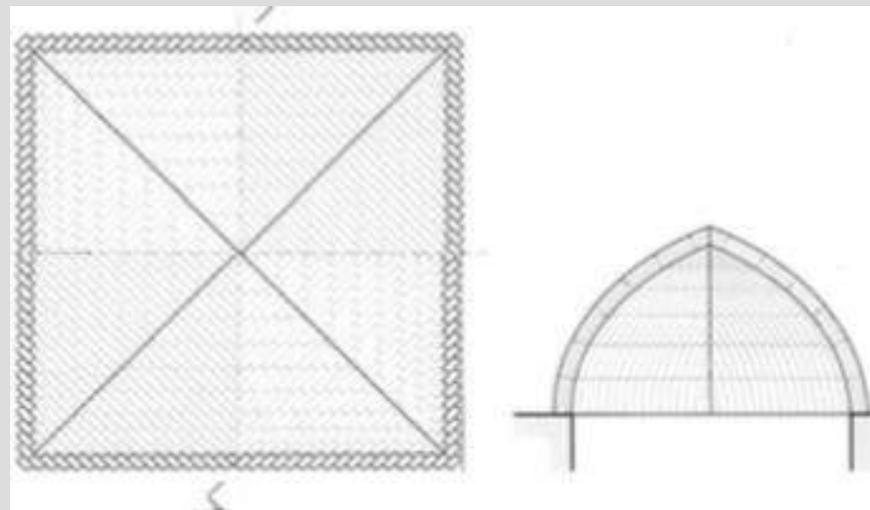
## Volta a Padiglione



**A filari secondo la generatrice**

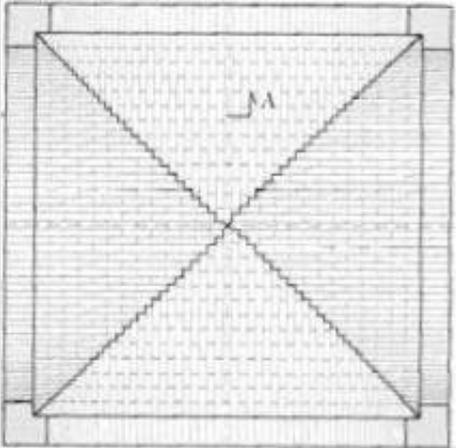


**Apparecchio misto**

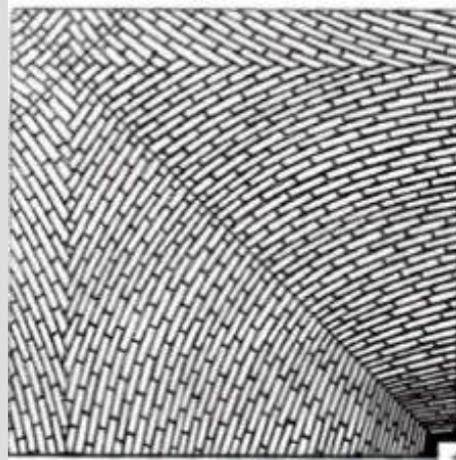


**A disposizione diagonale**

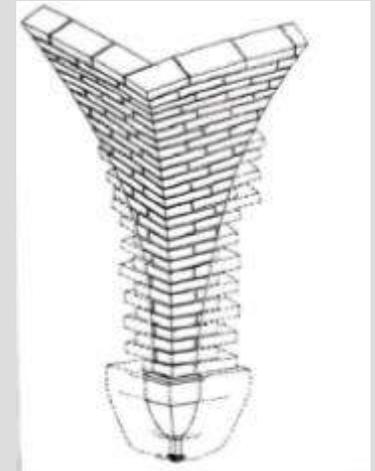
## Volta a Crociera



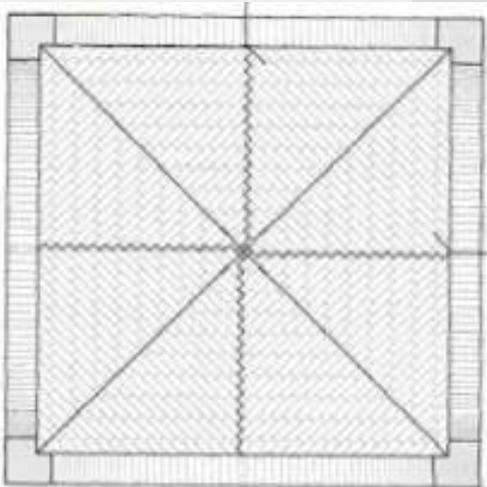
**A filari secondo la generatrice**



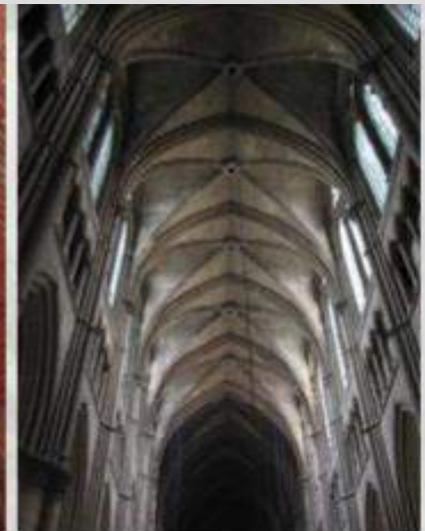
**Apparecchio Raccordato**



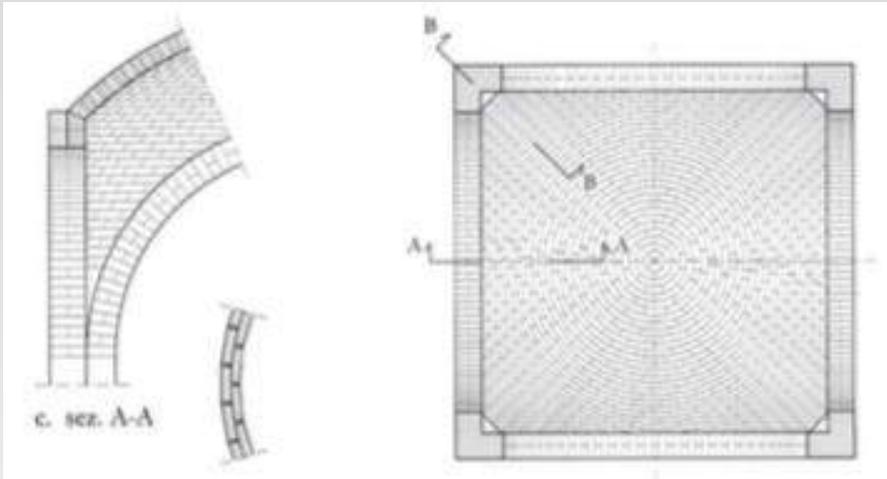
**Peduccio**



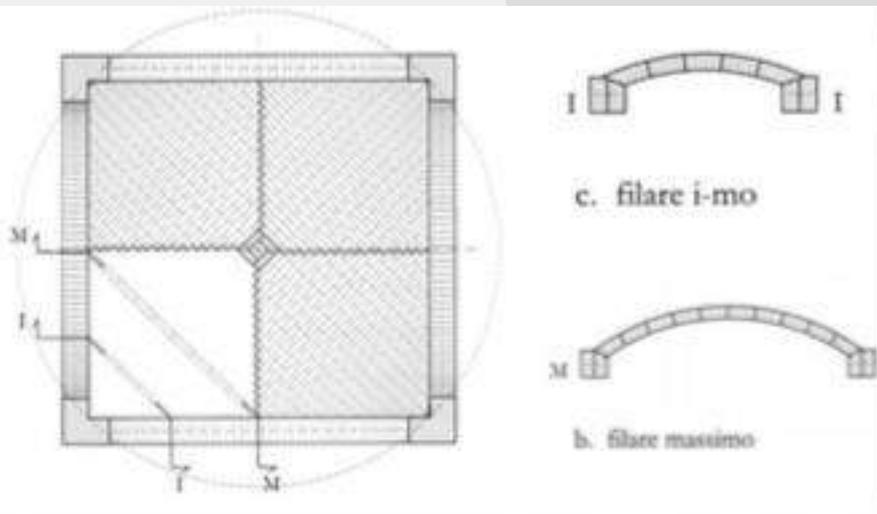
**Disposizione Diagonale**



## Volta a Vela



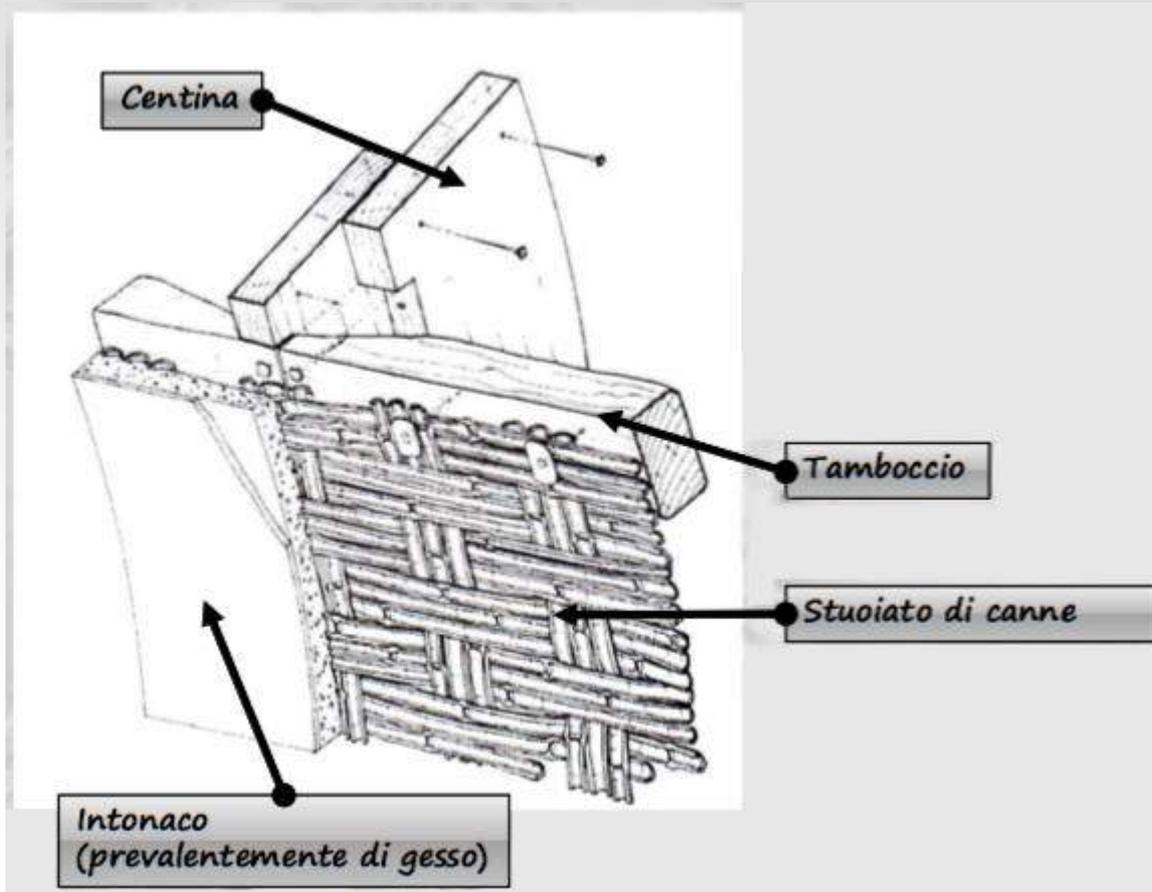
## Apparecchio a filari circolari



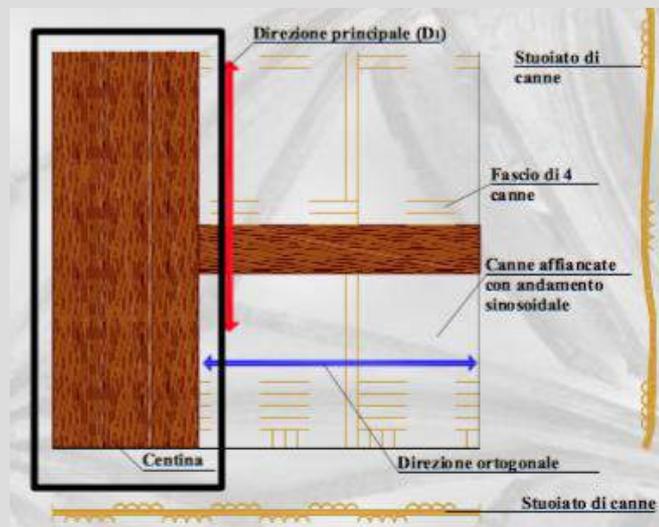
## Apparecchio ad archetti verticali diagonali

# Volte in Camorcanna

Le volte in camorcanna sono dette anche in canna di gesso. Il sistema costruttivo è povero ed è realizzato con materiali di basso pregio

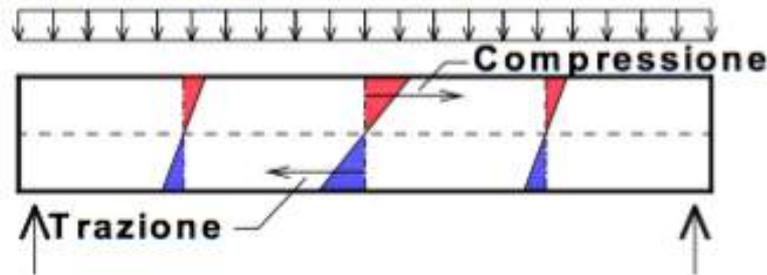


In questa tipologia costruttiva, le centine lignee compongono l'orditura principale; sono travi di 10-30 cm e sono costituite con l'accoppiamento chiodato di più tavole di forma irregolare e di altezza diversa

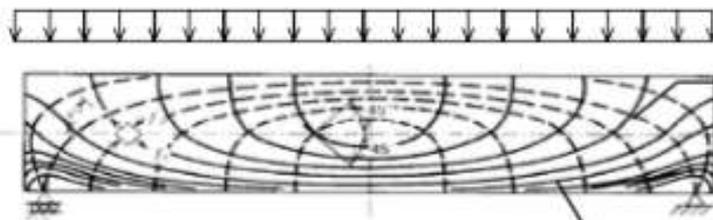


# Aspetti di base

## Trave appoggiata (sistema trilitico)



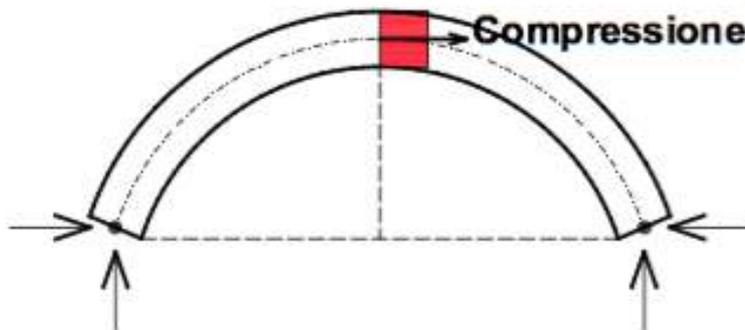
Trasmissione di sole  
azioni **verticali**



**Isostatiche di  
compressione**

**Isostatiche di  
trazione**

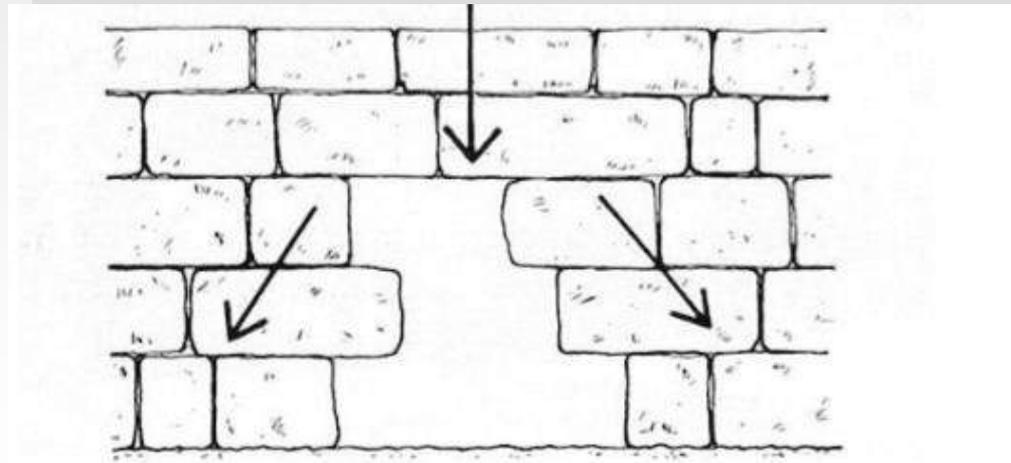
## Arco



Trasmissione di azioni  
**verticali e orizzontali**  
(spinte)

L'arco è un elemento strutturale in grado di incanalare, con la sua traiettoria curvilinea, le sollecitazioni prodotte dai carichi trasformandole in forze prevalenti di compressione.

La sollecitazione di compressione rappresenta praticamente l'unica sollecitazione cui la pietra e la muratura sono in grado di resistere.

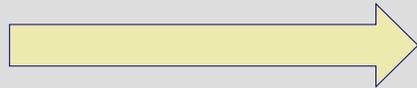


**Comportamento strutturale**

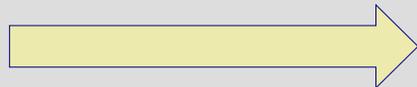


# Il materiale pietra

Principali  
proprietà

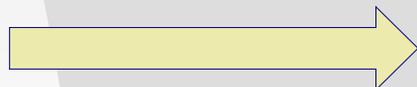


Fragilità



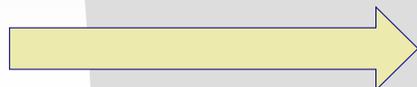
Scarsa resistenza a  
trazione

Stabilità  
ottenuta  
per compressione



## **VERIFICA DELL'EQUILIBRIO**

Geometria e distribuzione delle masse garantiscono il corretto flusso delle forze nelle sezioni resistenti

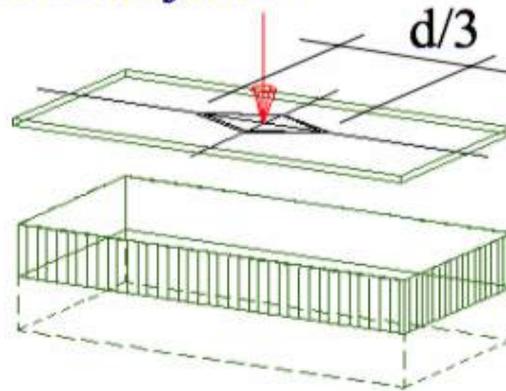


## **VERIFICA DI RESISTENZA**

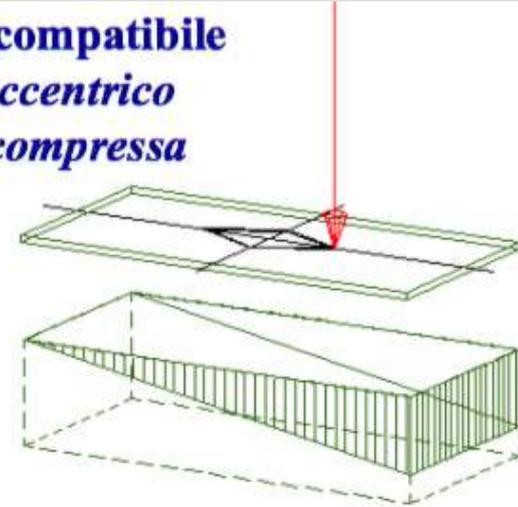
Le sollecitazioni nelle sezioni devono essere minori delle resistenze dei materiali

# Equilibrio e resistenza

**Situazione ideale**  
*Compressione uniforme*



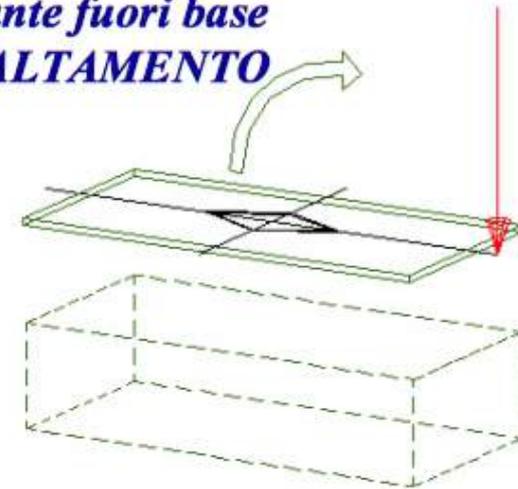
**Situazione compatibile**  
*Carico eccentrico*  
*Sezione compressa*



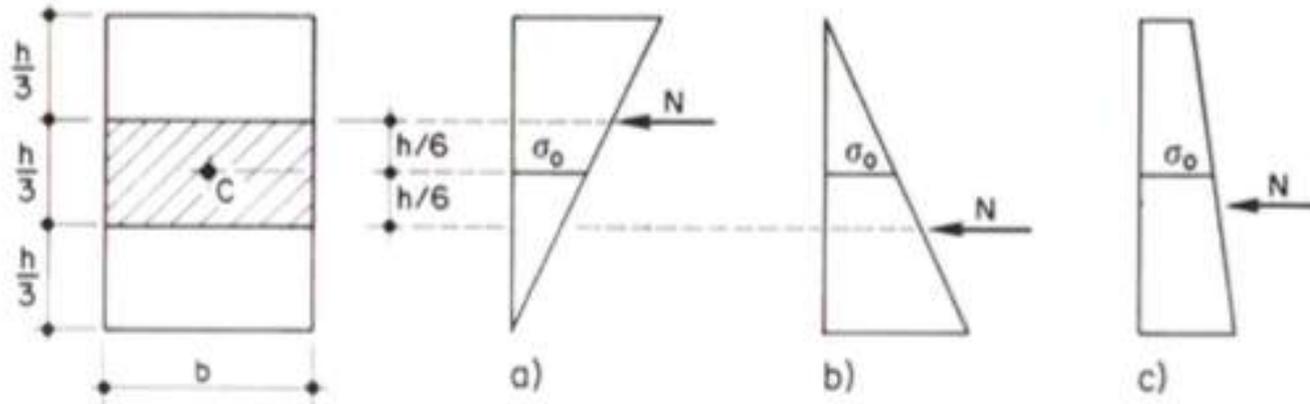
**Situazione limite**  
*Sezione parzializzata*  
*Superamento della resistenza*



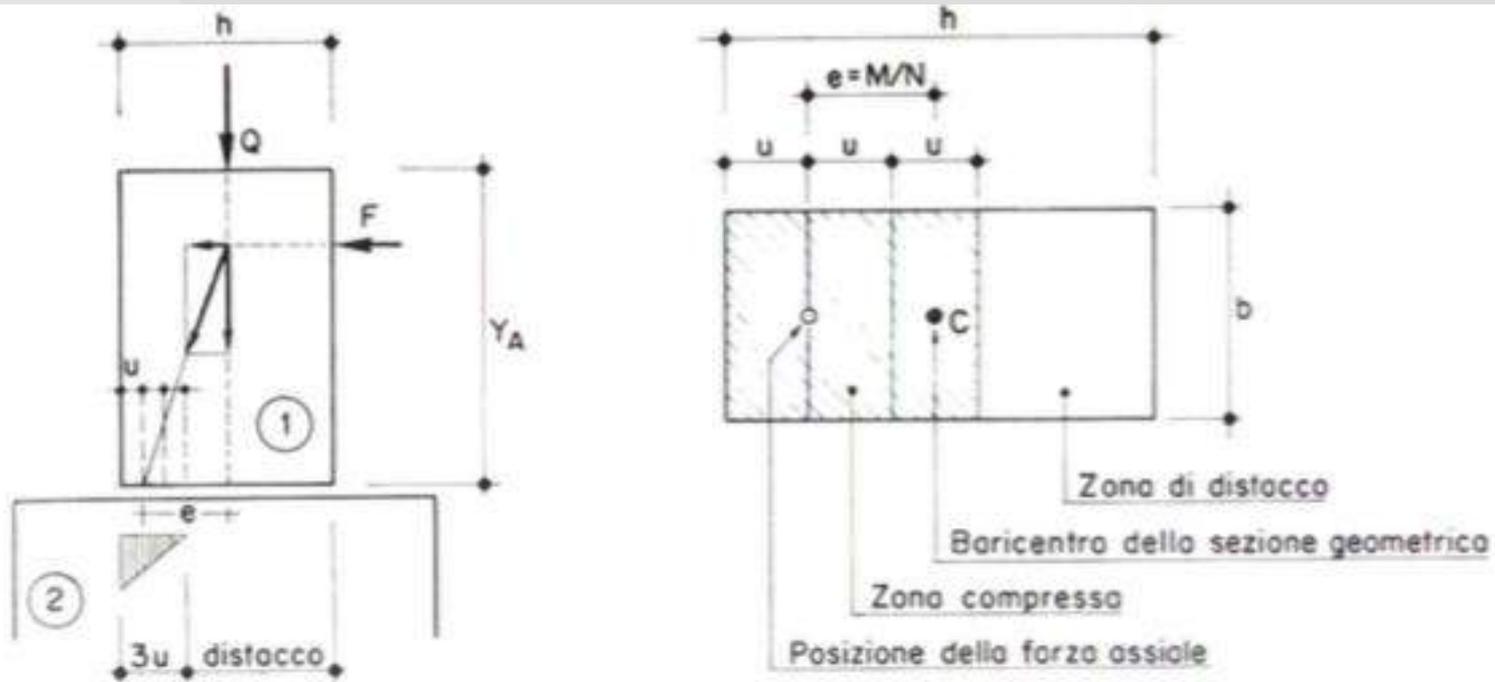
**Situazione instabile**  
*Risultante fuori base*  
➔ **RIBALTAMENTO**



La sezione rettangolare è tutta compressa se il centro di pressione cade all'interno del terzo medio



Nel caso di due corpi appoggiati l'uno sull'altro con vincolo di semplice contatto non può sussistere equilibrio se il risultante cade fuori dalla sezione.





## **Gli studi sull'arco**

Gli studi condotti sull'arco nel corso dei secoli hanno riguardato prevalentemente la forma da conferirgli per garantire, in corrispondenza delle facce a contatto tra un concio e l'altro, la centratura dello sforzo normale e cioè che quest'ultimo non fuoriuscisse dalla sezione di contatto tra i conci lapidei.

In altri termini, il progetto o la verifica di un arco in muratura consiste nell'accertare che nelle sezioni di contatto tra i conci non siano presenti esclusivamente forze di trazione e che le forze di compressione siano di entità compatibile con la resistenza del materiale.



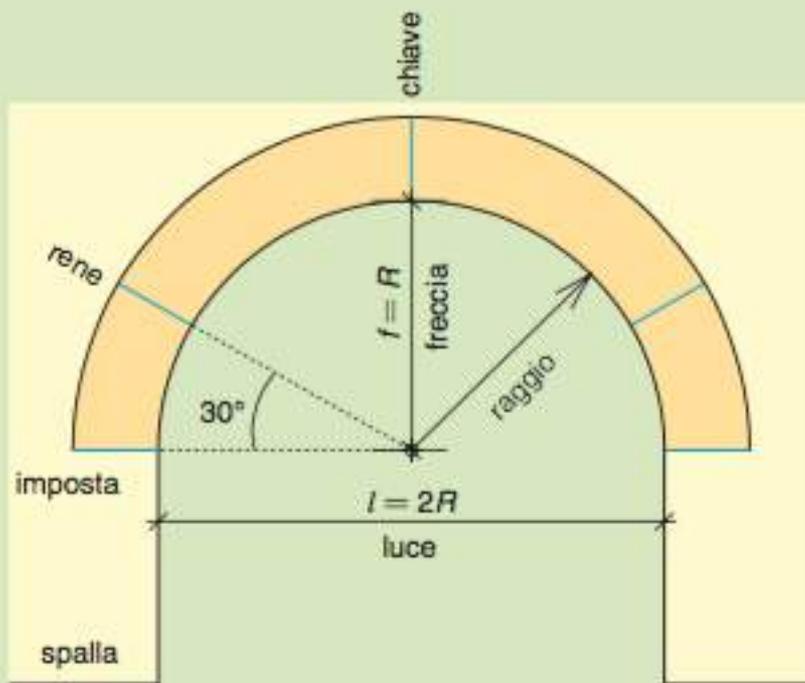
## Gli studi sull'arco

In condizioni ideali, per un arco con sezione trasversale rettangolare, bisogna verificare che la curva delle pressioni sia contenuta, per tutte le sezioni, all'interno della fascia centrale delimitata dal terzo medio (nocciolo centrale d'inerzia).

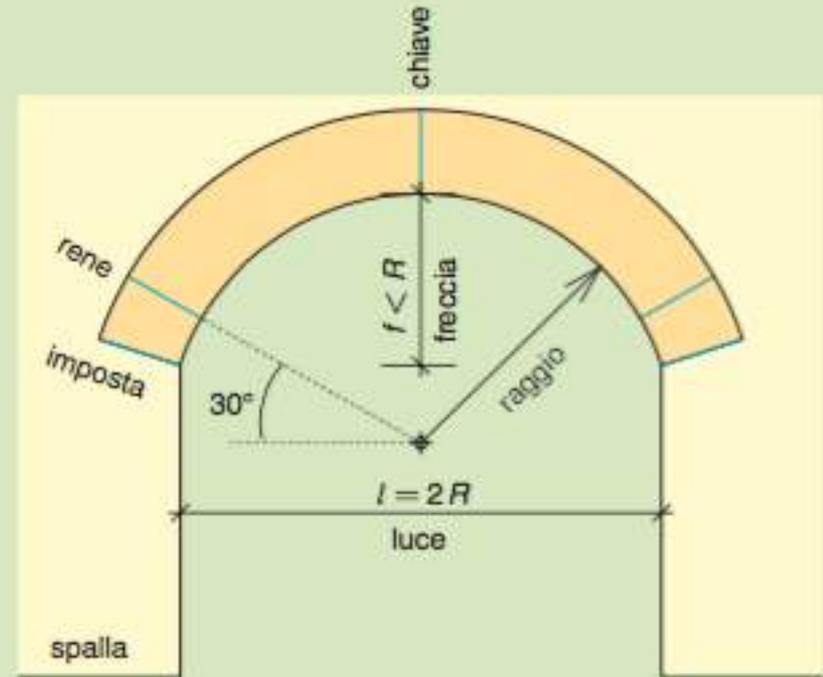
Per un arco dotato di simmetria geometrica, di carico e di vincoli, la determinazione della curva delle pressioni, e quindi del regime statico nell'arco, può essere determinato attraverso un ingegnoso procedimento grafico, dovuto a **Mèry**, antesignano dei concetti di calcolo a rottura introdotti molti anni più tardi.

# Introduzione al problema

La figura mostra due configurazioni tipiche dell'arco circolare, a tutto sesto e a sesto ribassato, e i relativi elementi caratteristici: raggio, luce, freccia; sezioni di chiave, di rene e di imposta.

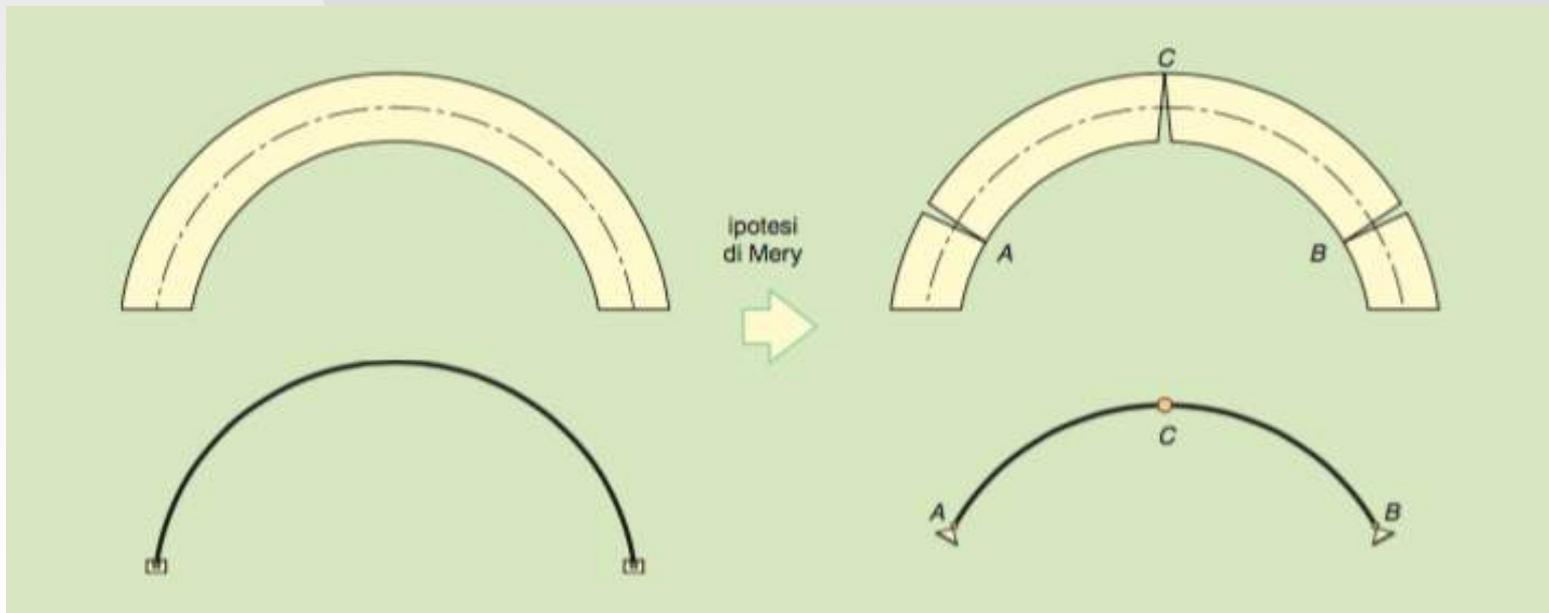


ARCO A TUTTO SESTO



ARCO A SESTO RIBASSATO

Il metodo di Mery, proposto nel 1840, è valido nel caso di luci limitate, di andamento circolare o parabolico dell'asse e di carichi simmetrici. Esso si basa sull'osservazione sperimentale che, all'aumentare del carico, la fessurazione inizia all'estradosso delle sezioni di reni e all'intradosso della sezione di chiave.



In questa situazione, che può essere considerata come uno stato limite di collasso, nelle tre sezioni indicate è consentita la rotazione e si ha un comportamento a cerniera.

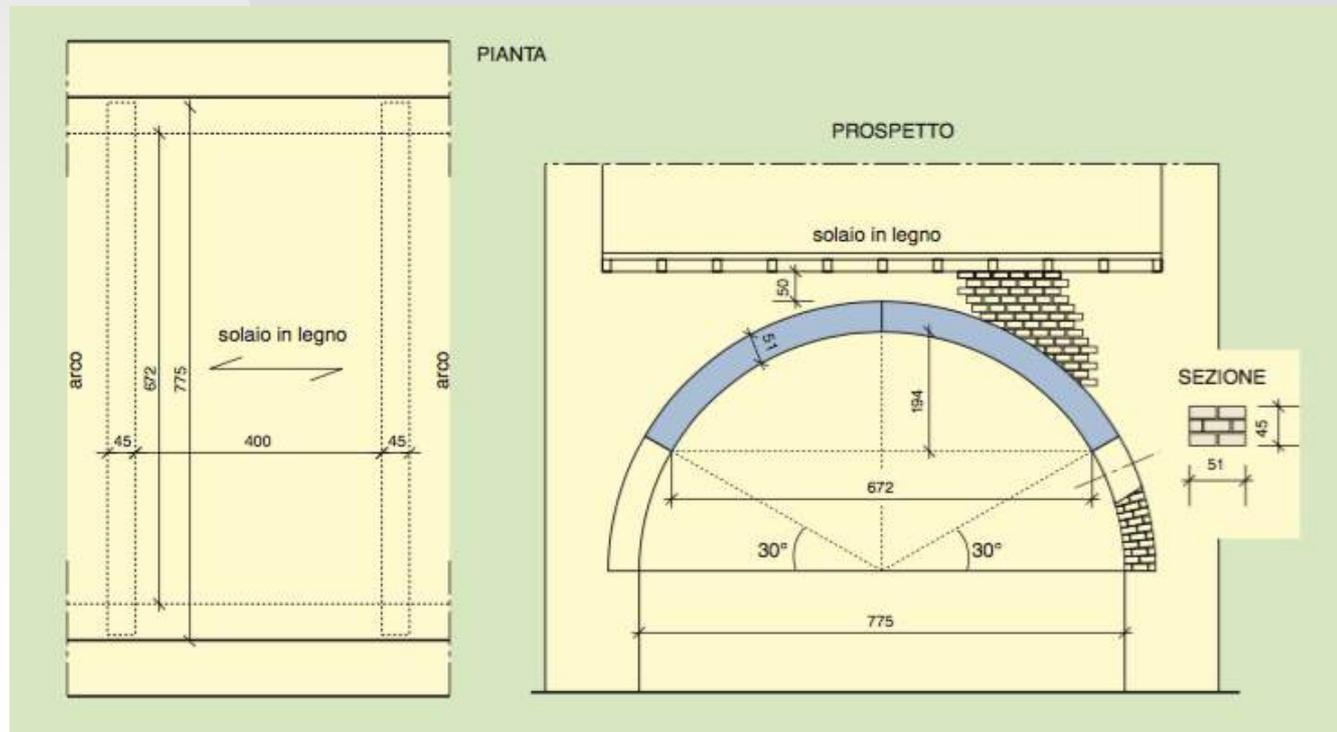
Si può quindi assumere per il calcolo dell'arco lo schema di arco a tre cerniere impostato sulle sezioni di rene.

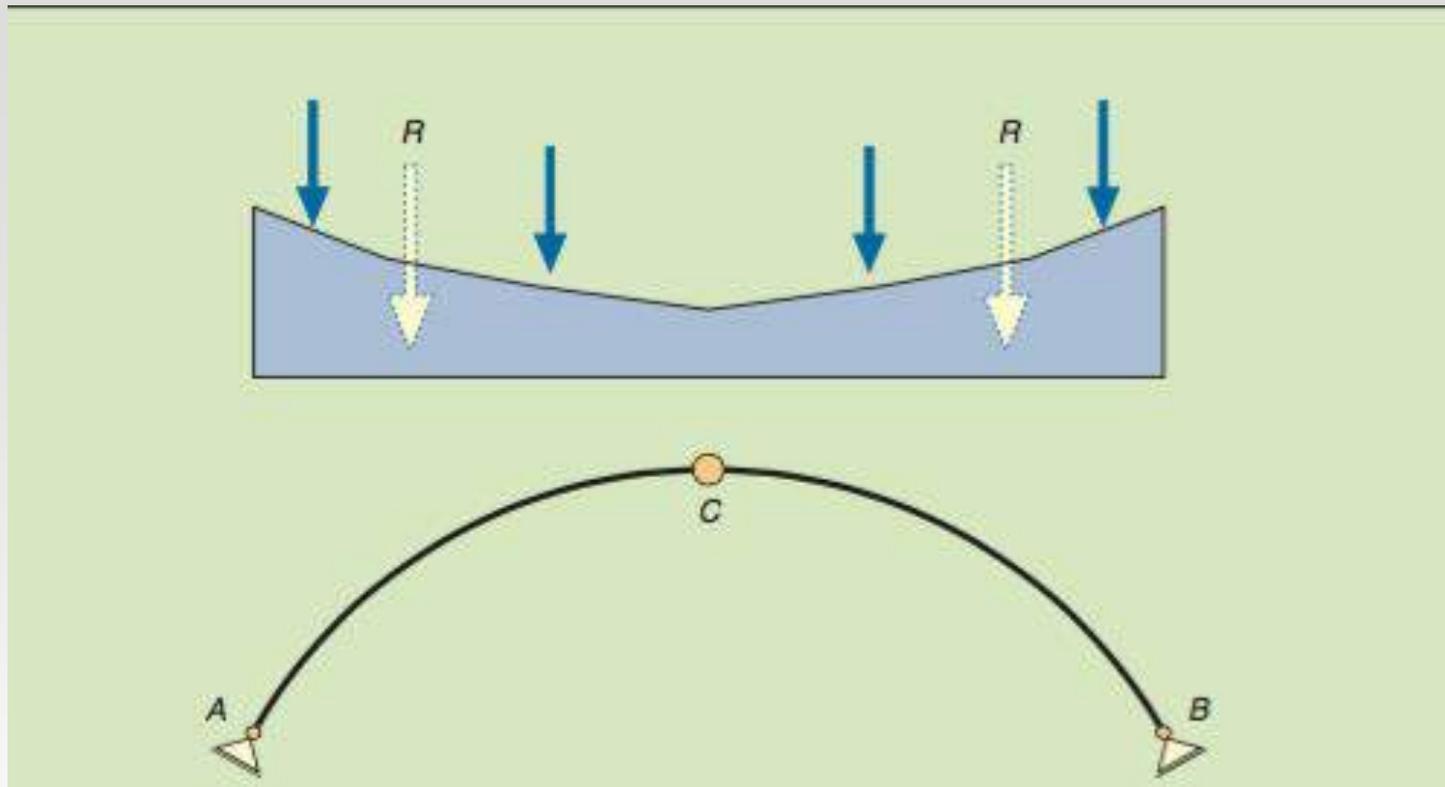
L'arco a tre cerniere è un elemento articolato isostatico, le cui reazioni vincolari si possono ricavare con le sole condizioni di equilibrio del corpo rigido; data la simmetria, inoltre, si può studiare un solo semiarco

Si consideri l'esempio tratto da Zavarella, Leti, Veggetti, *Progettazione, costruzioni e impianti* – Zanichelli, 2012

Arco a tutto sesto in cui sono dati lo spessore  $t = 51$  cm, la luce e la freccia d'intradosso. Lo spessore dei muri sovrastanti, realizzati in muratura di mattoni pieni ( $Y_m = 18$  kN / m<sup>3</sup>) è di 45 cm.

Sugli archi poggia un solaio in legno di luce 4,00 m sul quale insiste un carico areale di 5 kN / m<sup>2</sup>.



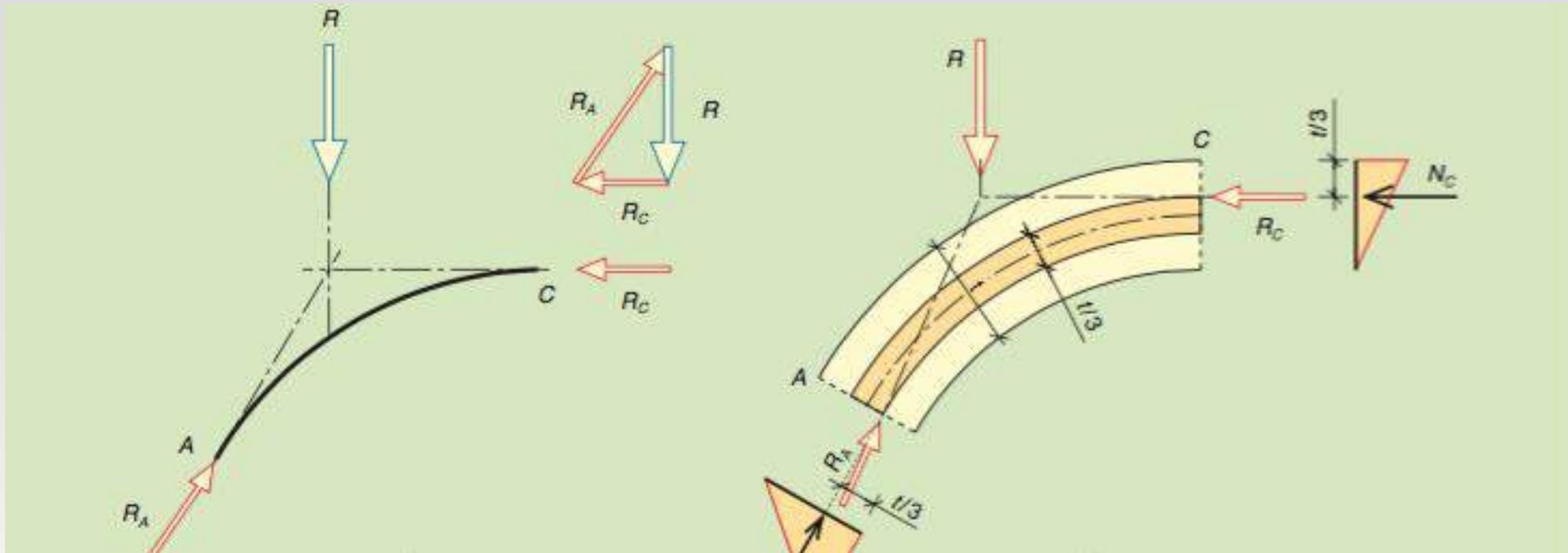


Su ogni metro lineare di muro il solaio trasferisce un carico di  $5 \cdot 4 / 2 = 10$  kN; si deve dunque considerare sul muro un carico  $p = 10$  kN / m.

La reazione della cerniera di chiave  $R_C$  è orizzontale per la simmetria geometrica e di carico. Nota, quindi la risultante dei carichi  $R$ , resta determinata la reazione della cerniera di rene  $R_A$ .

Le due reazioni, però, non passano per l'asse dell'arco, ma rispettivamente per il terzo medio superiore e per il terzo medio inferiore.

Ciò è coerente con lo stato di fessurazione ipotizzato, che comporta diagrammi triangolari delle tensioni: nulle dove si ha la massima apertura, massime in corrispondenza del centro di rotazione.



Nell'ipotesi di Mery è possibile studiare il solo semiarco a sesto ribassato

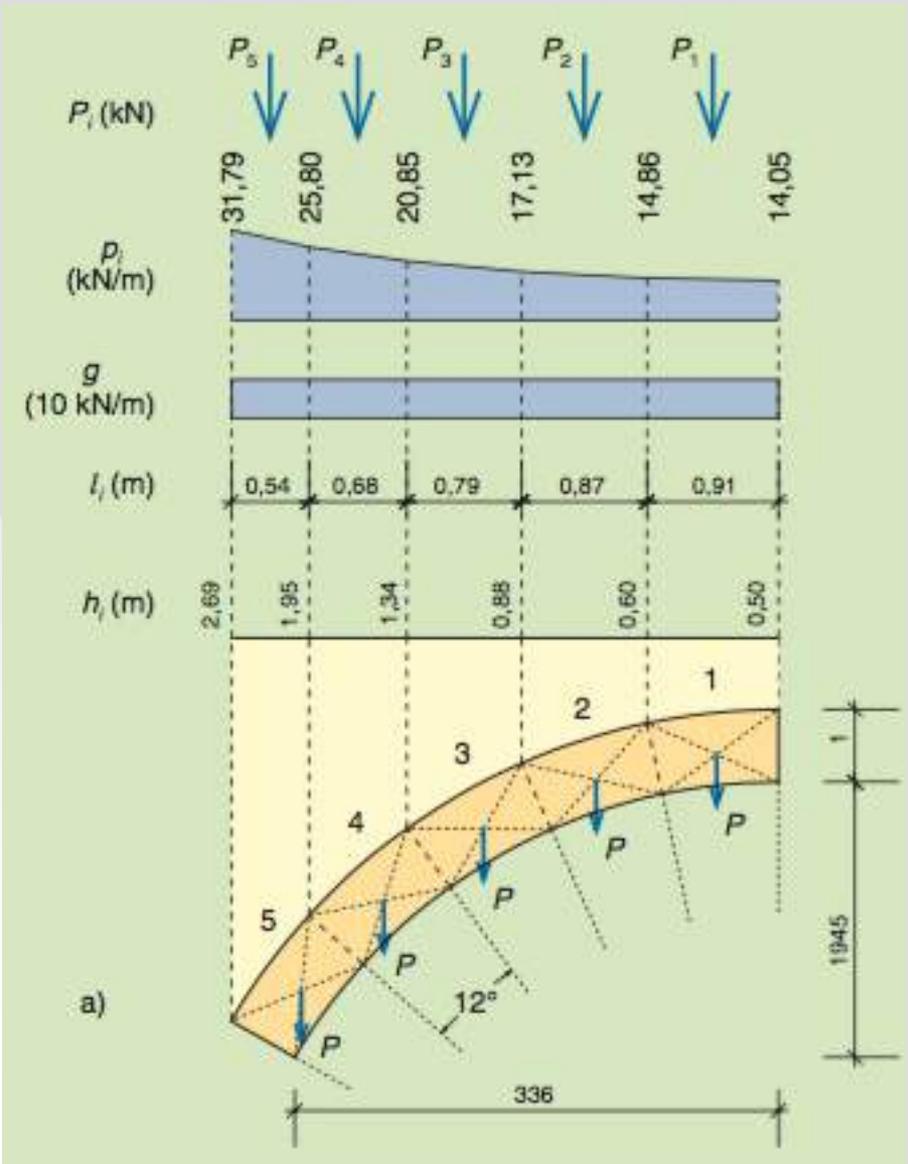
Si può notare infine che, mentre la reazione di chiave è perpendicolare alla sezione (e quindi produce solo sforzo normale), la reazione di rene è inclinata e produce nella sezione sforzo normale e taglio. La deviazione dalla perpendicolare è però, in genere, talmente modesta che si possono trascurare gli effetti del taglio, assegnando allo sforzo normale l'intero valore della reazione  $R_A$ .



# RISOLUZIONE GRAFICA

La risoluzione grafica, soprattutto se eseguita con un programma CAD che la rende più rapida e precisa, è particolarmente interessante perché mostra con grande immediatezza l'andamento della sollecitazione nell'intero arco e, quindi, il suo funzionamento statico.

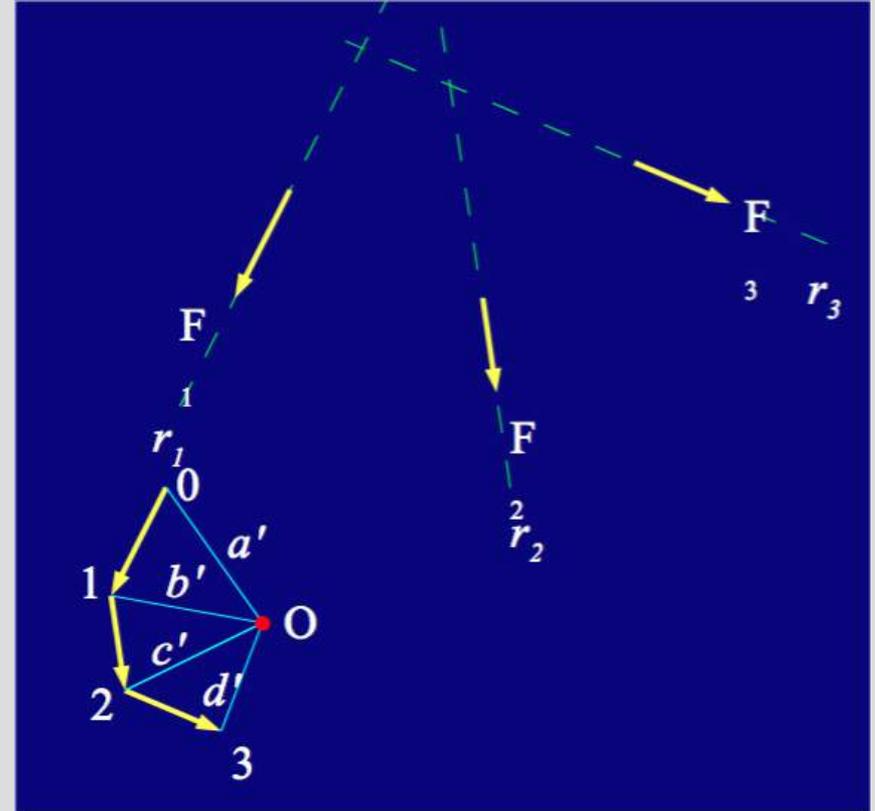
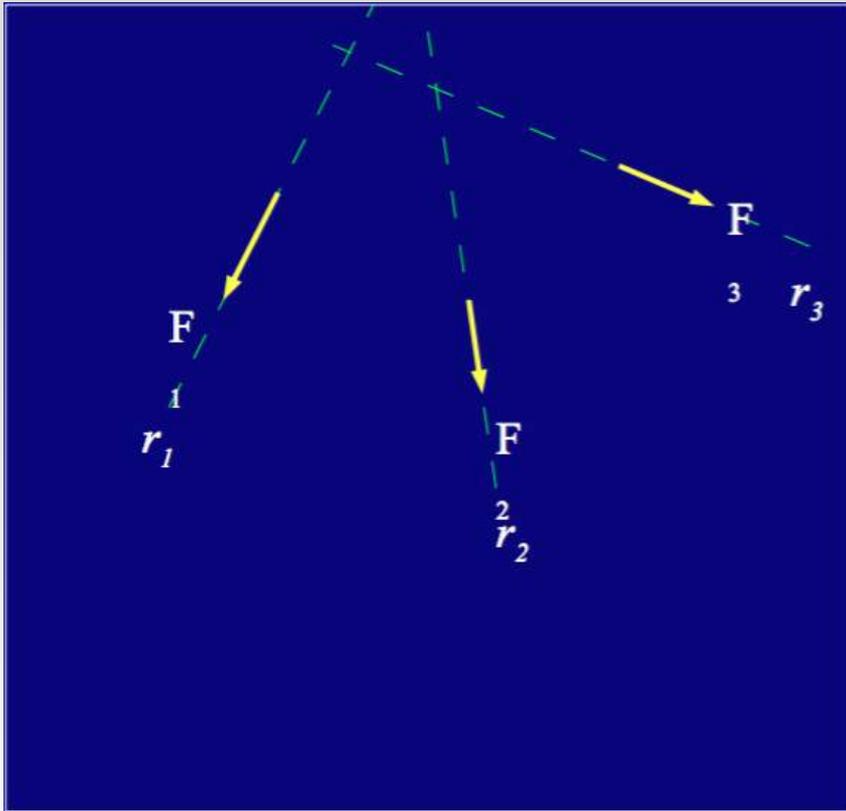
# Suddivisione in conci



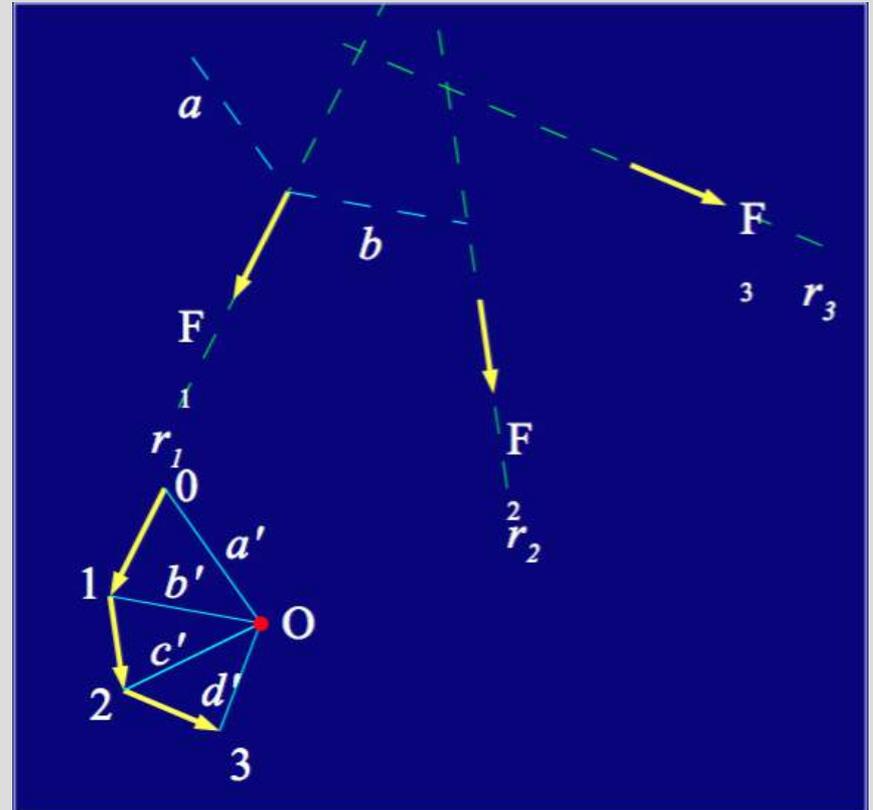
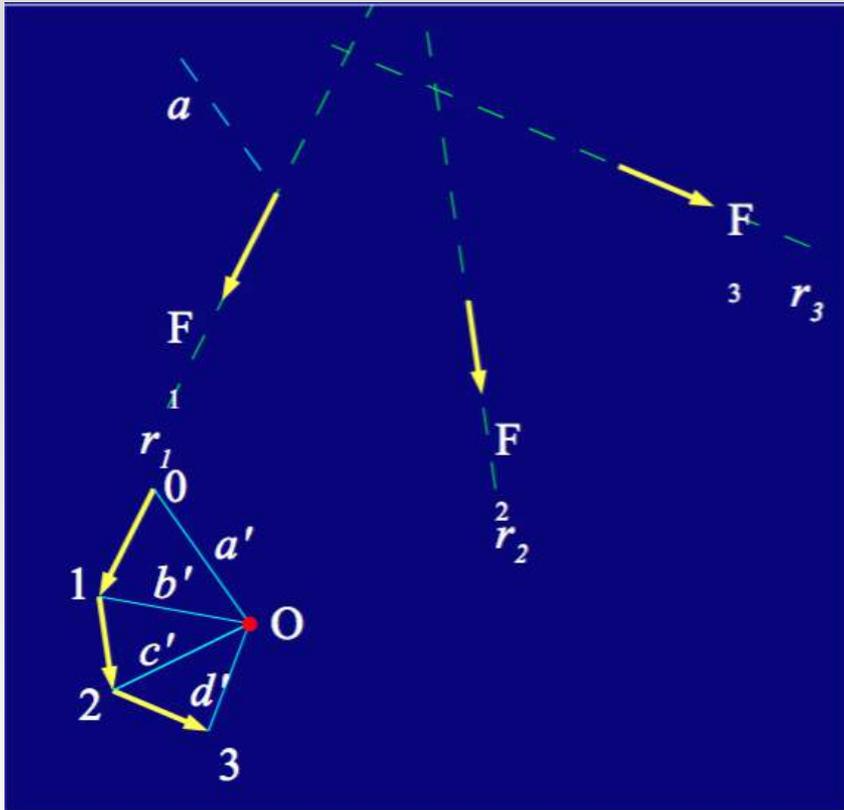


# PRINCIPI DEL METODO GRAFICO

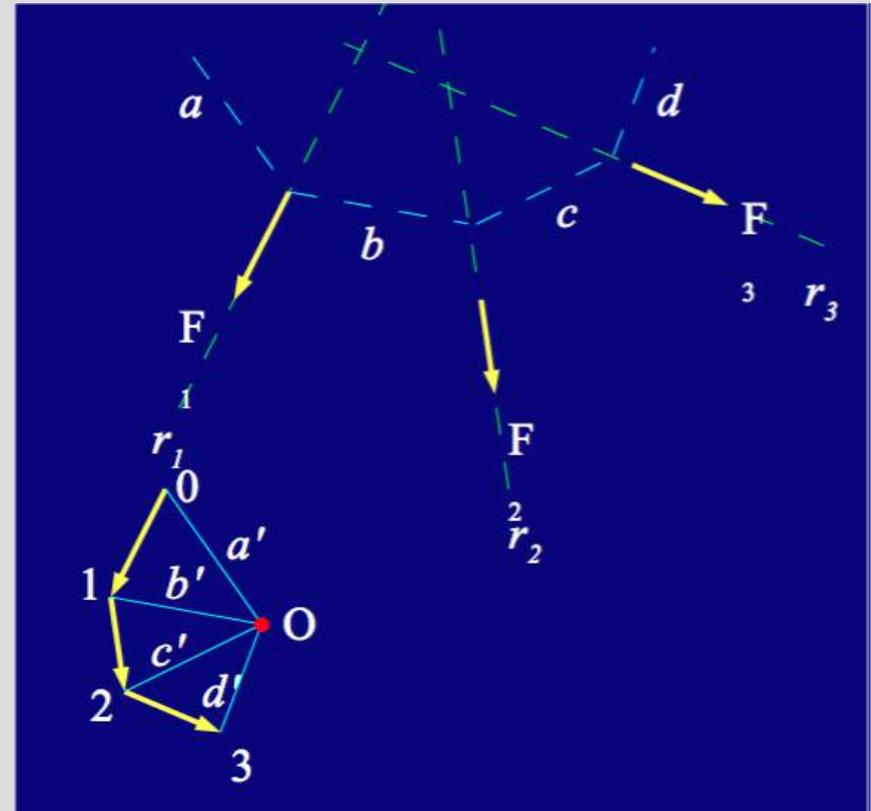
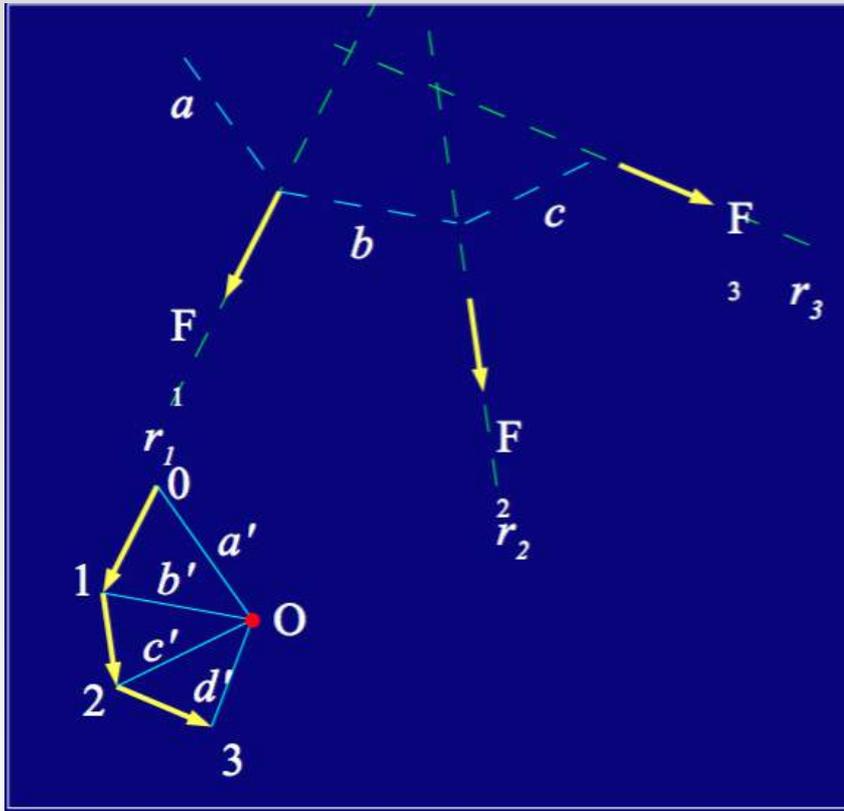
Interrompiamo momentaneamente l'applicazione del metodo di Mery per illustrare il procedimento grafico per ricavare il risultante di un generico sistema piano di forze con il metodo del poligono funicolare



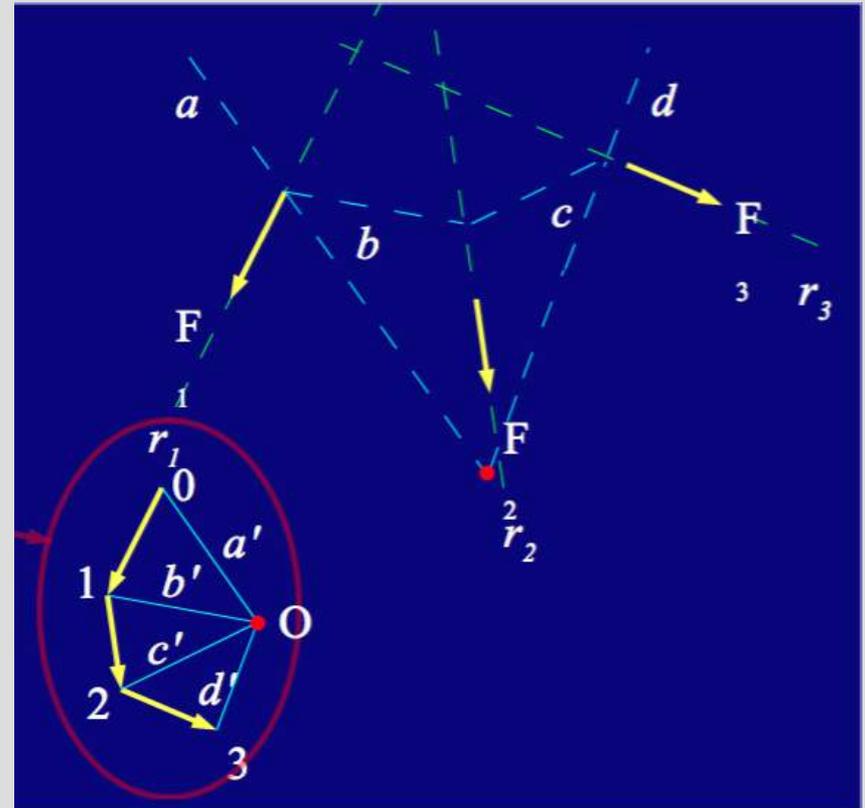
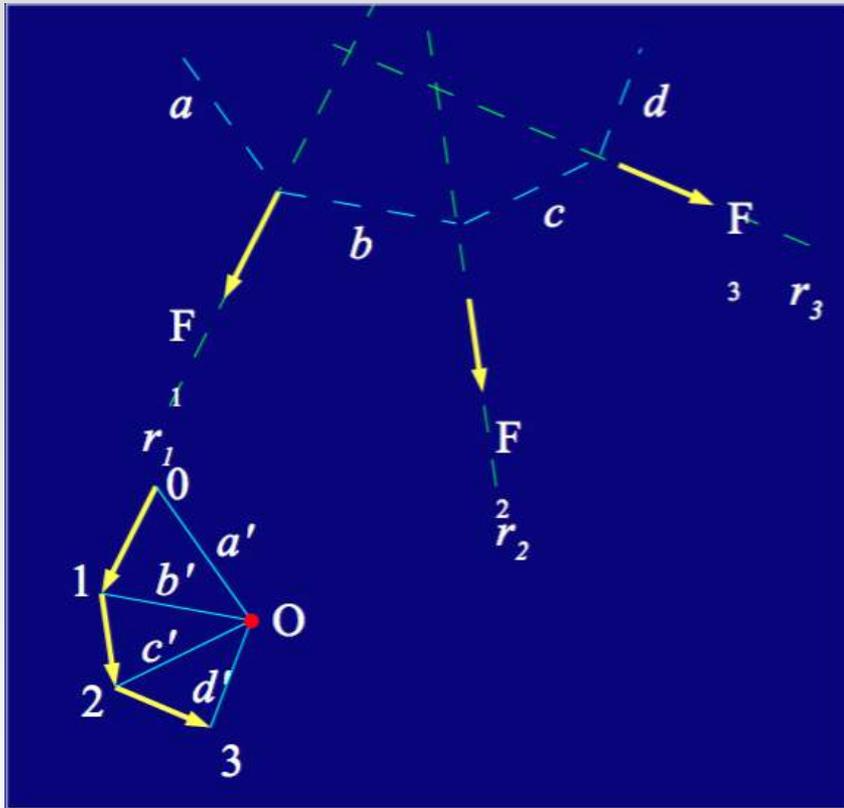
- Sia dato il sistema di forze  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ .
- Si disegni la poligonale 0123 delle forze e se ne proiettino i vertici da un polo  $O$  arbitrario.



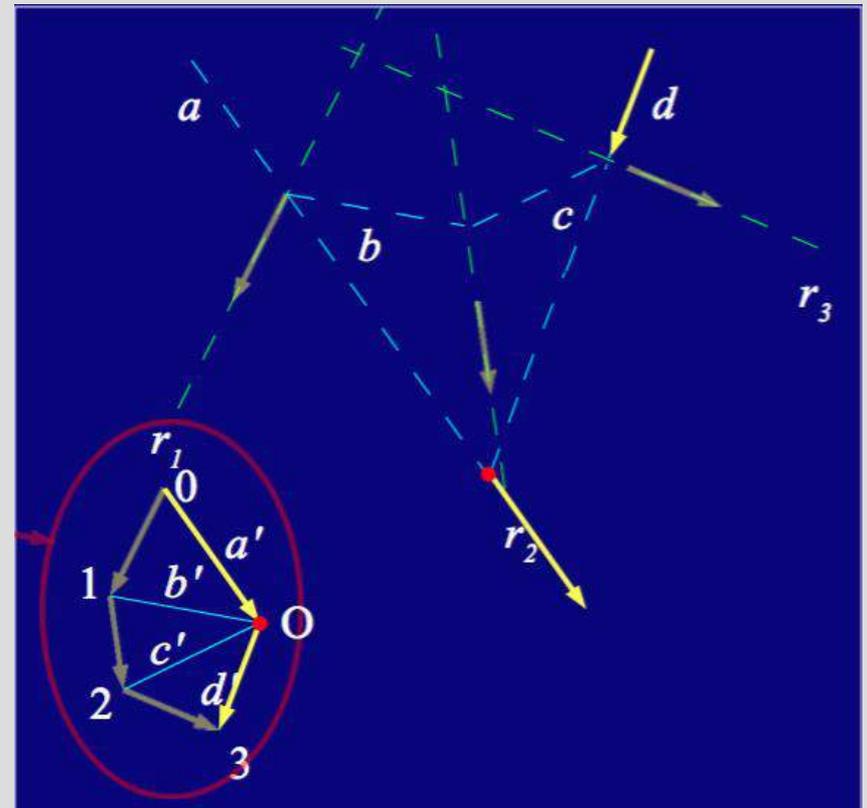
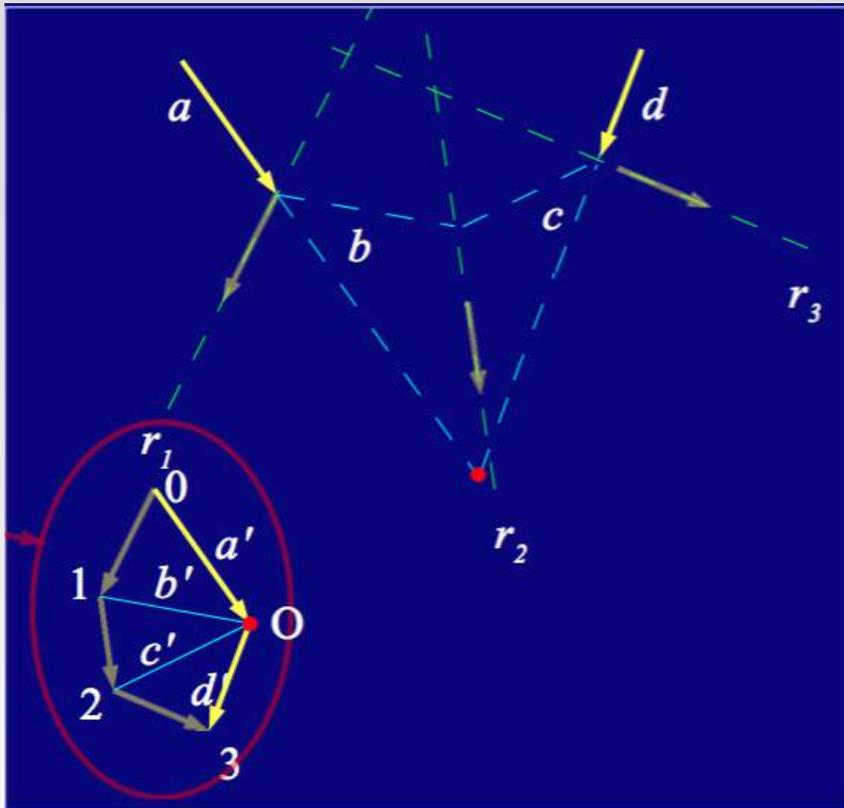
- Si disegni la retta  $a \parallel a'$  che interseca  $r_1$ ;
- Si disegni la retta  $b \parallel b'$  che interseca  $r_1$  e  $r_2$ ;



- Si disegni la retta  $c \parallel c'$  che interseca  $r_2$  e  $r_3$ ;
- Si disegni la retta  $d \parallel d'$  che interseca  $r_4$ ;

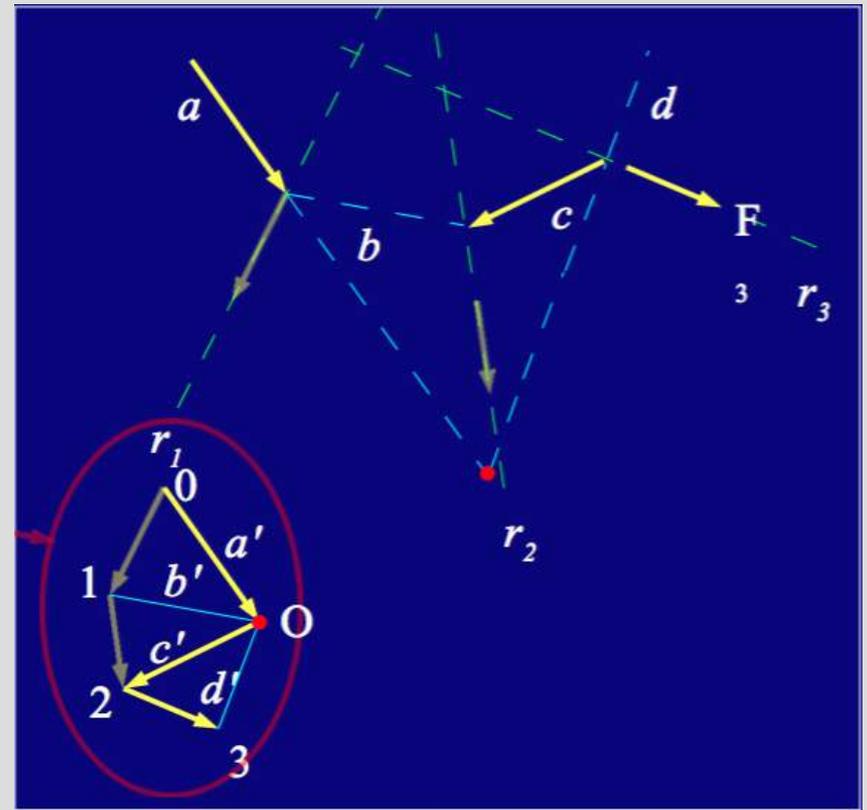
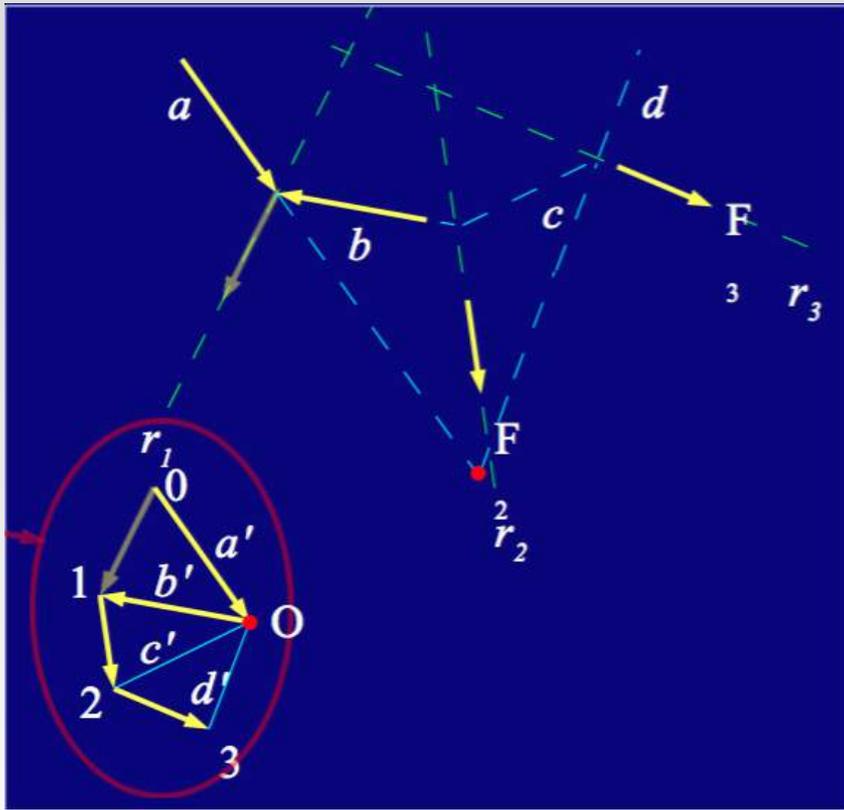


- La spezzata  $abcd$  è detta poligono funicolare;
- L'intersezione di  $a$  e  $d$  fornisce un polo rispetto al quale il momento è nullo. Il sistema è equivalente alla sola risultante applicata nel punto trovato.



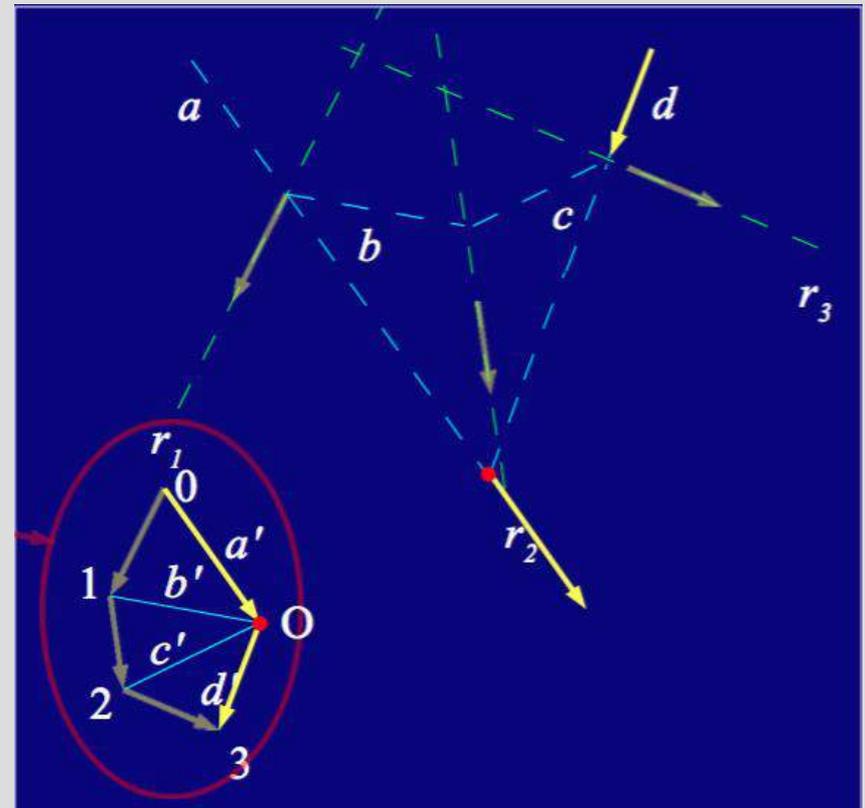
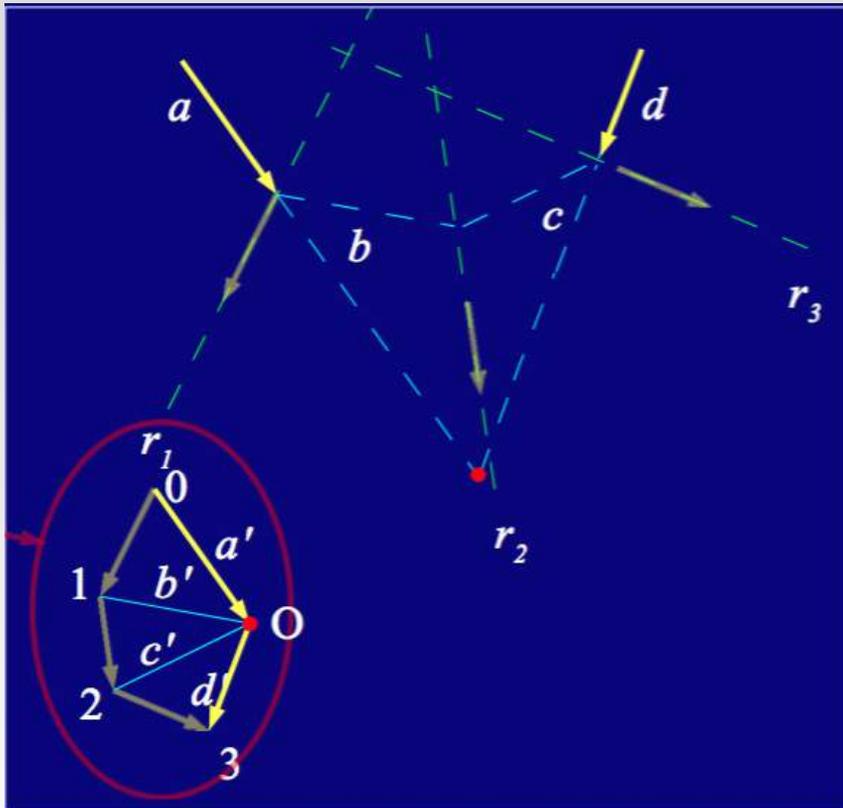
Spiegazione :

- 1 . Si proietti  $F_1$  rispetto ad  $a$  e  $b$ ,
- 2 . Si proietti  $F_2$  rispetto a  $b$  e  $c$



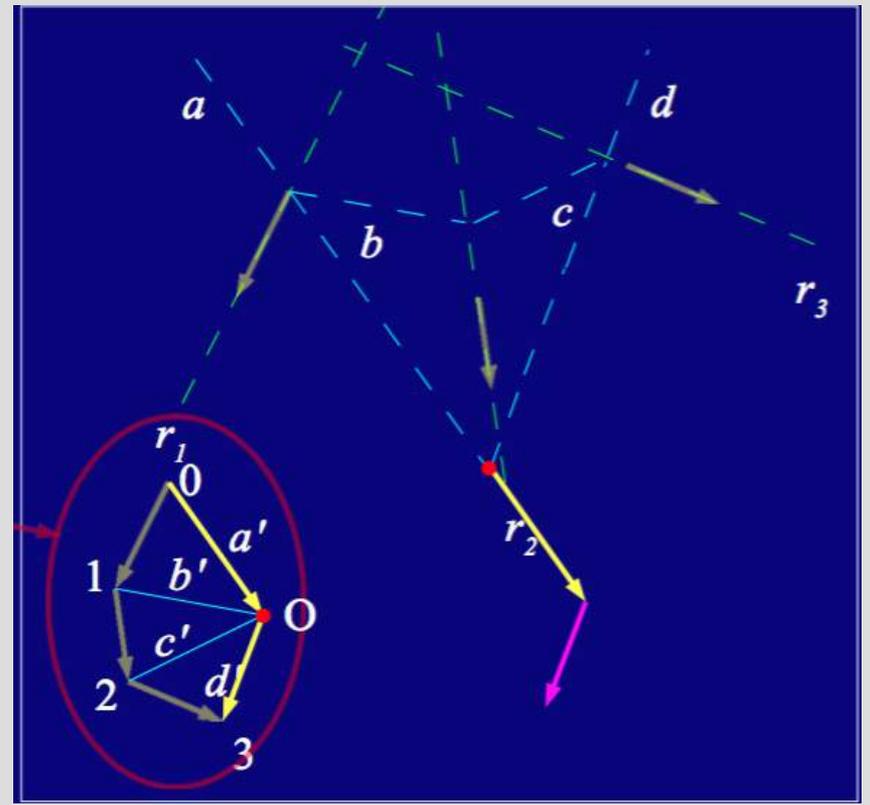
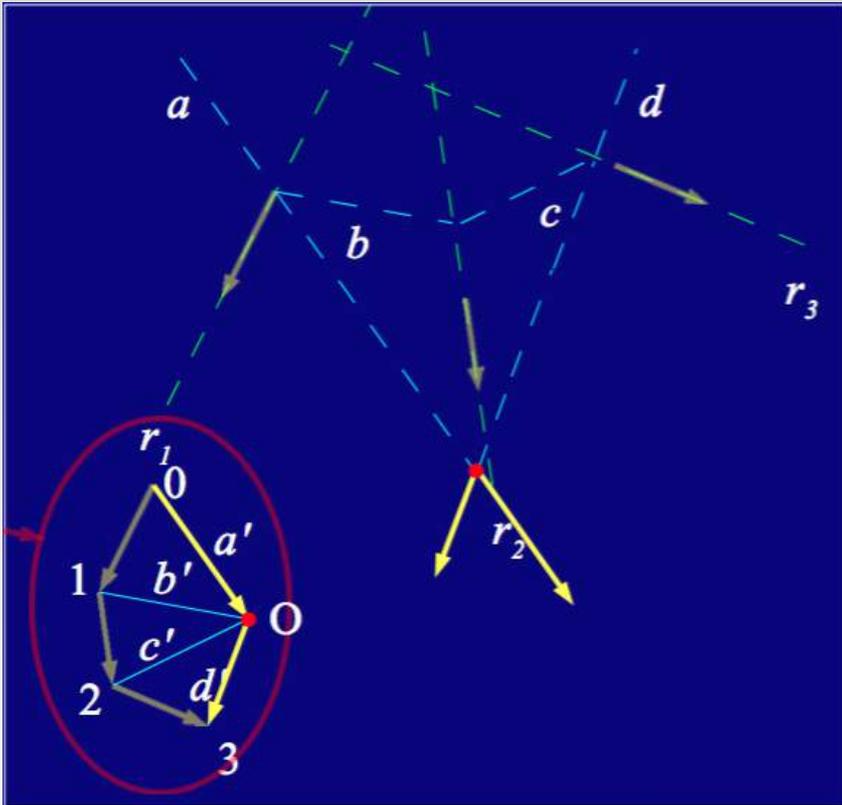
Spiegazione :

3 . Si proietti  $F_3$  rispetto a  $c$  e  $d$

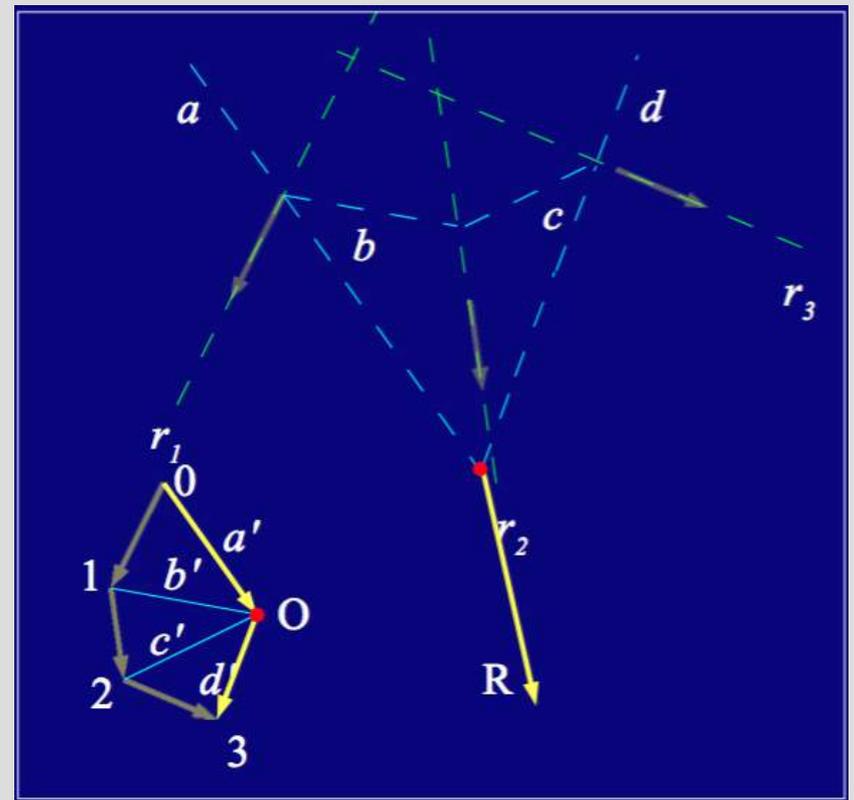
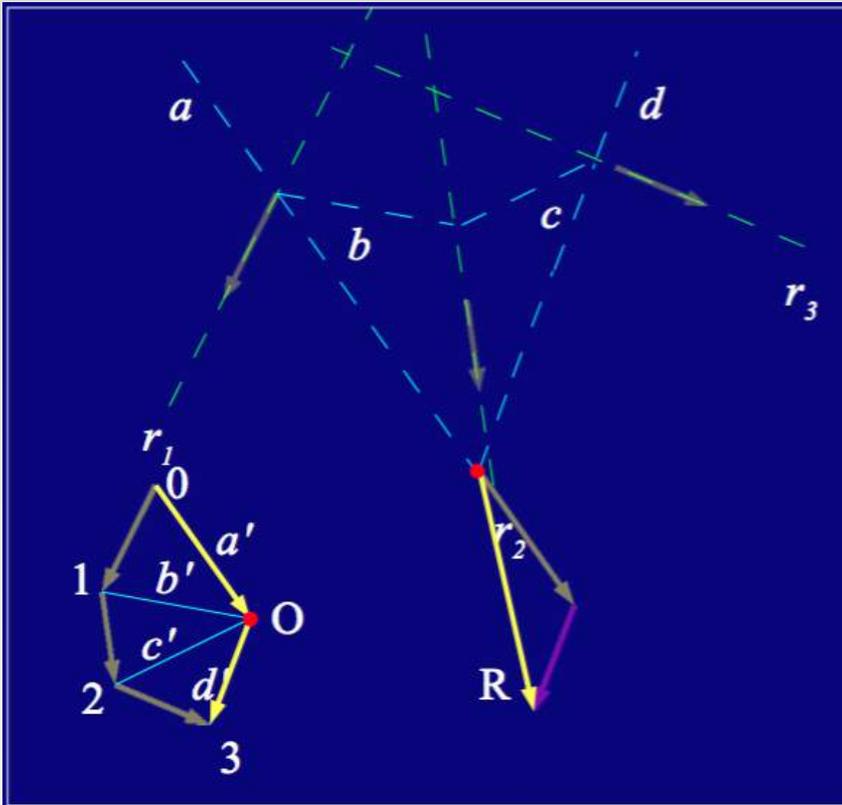


Spiegazione :

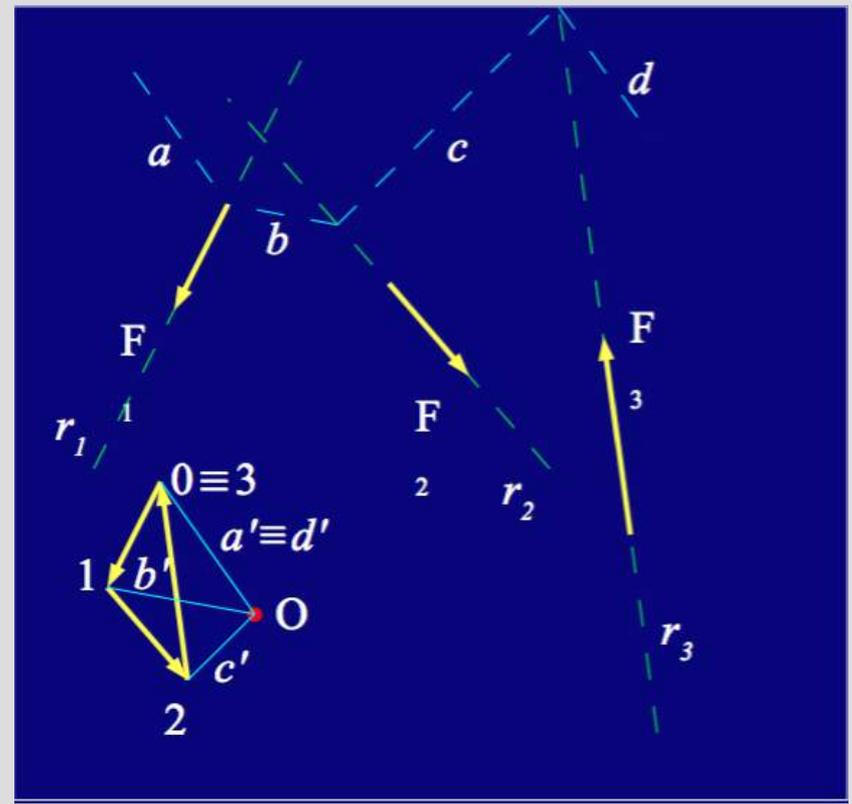
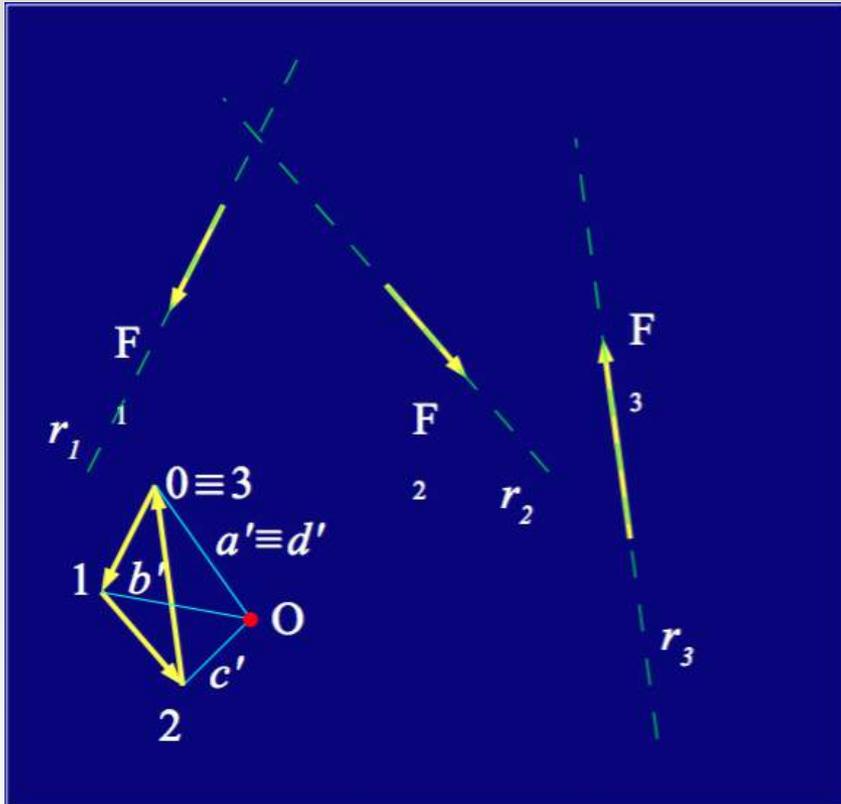
Si osserva che le componenti lungo  $b$  e  $c$  si annullano reciprocamente, e rimangono solo le componenti lungo  $a$  e  $d$ .



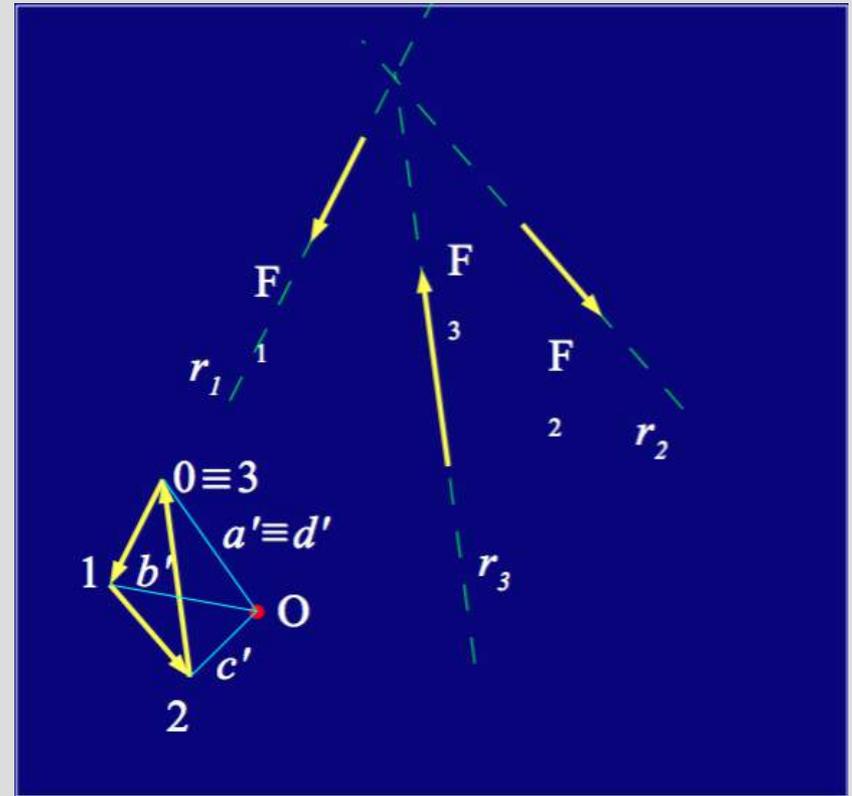
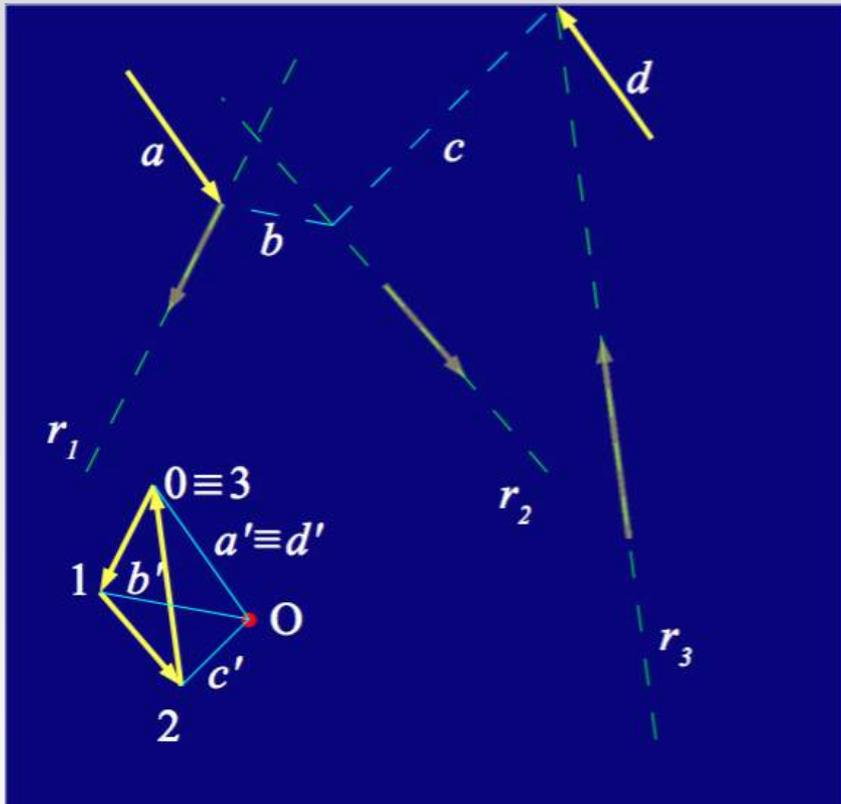
Somma delle componenti



Somma delle componenti

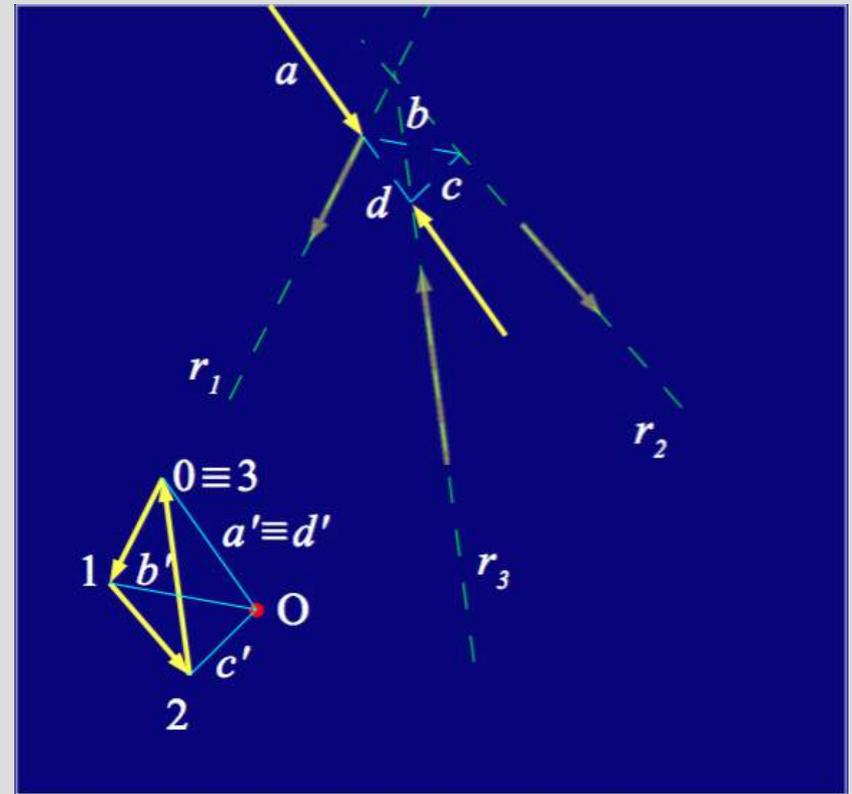
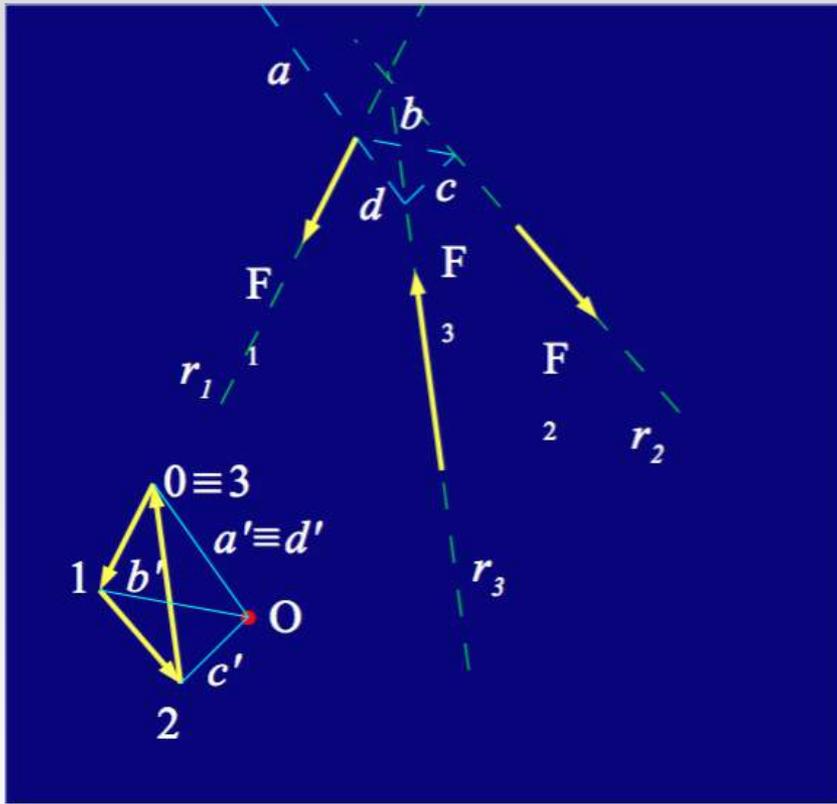


Sistemi di forze a risultante nulla:  
La poligonale è chiusa;  
Le rette  $a$  e  $d$  sono parallele;



Sistemi di forze a risultante nulla:

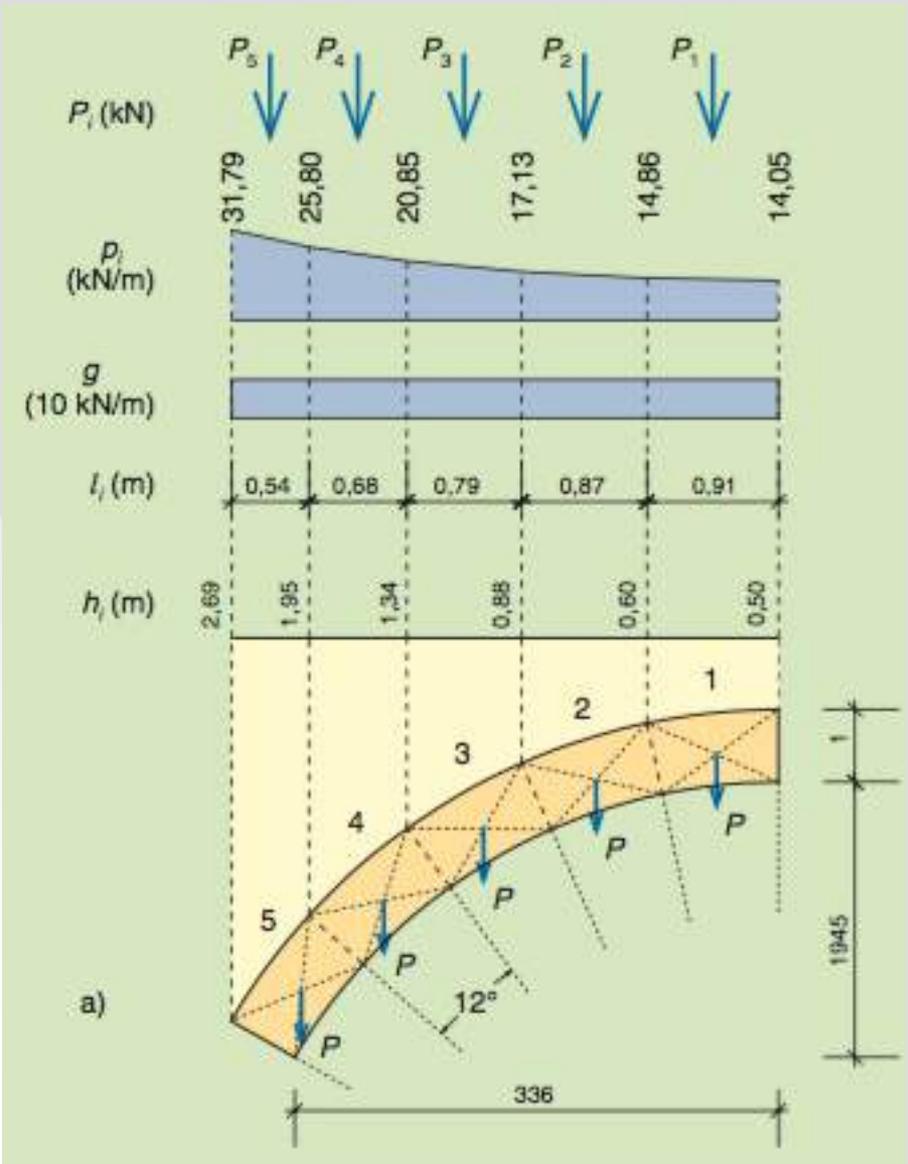
Le due forze agenti lungo  $a$  e  $d$  individuano una coppia pari a quella del sistema originario.



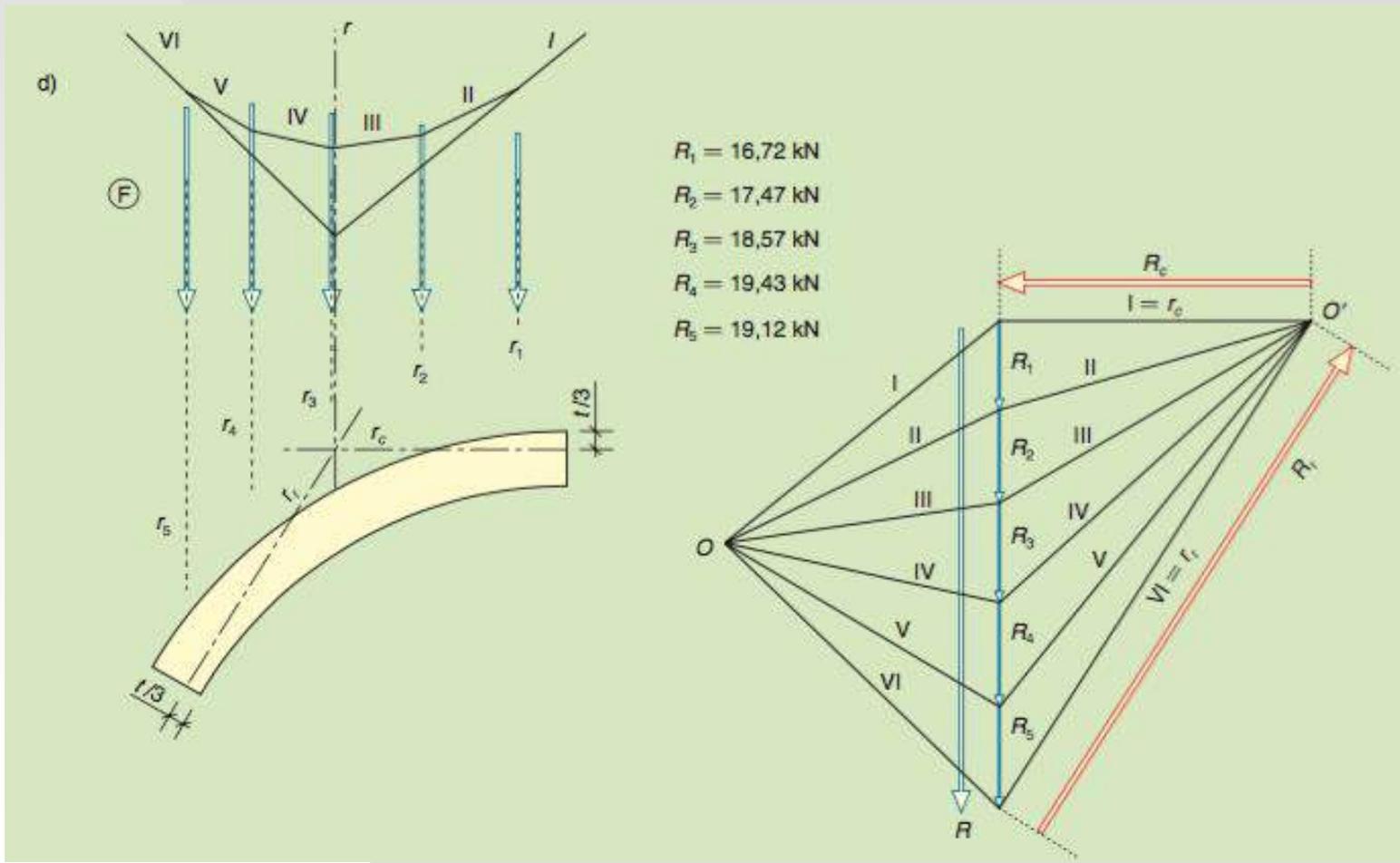
Sistemi di forze a risultante nulla:

Se le forze sono concorrenti  $a$  e  $d$  coincidono, il poligono funicolare è chiuso e le due forze equivalenti al sistema originario giacciono sullo stesso asse. Anche la risultante dei momenti è quindi nulla.

# Suddivisione in conci



La sua retta d'azione  $r$  è individuata dal poligono funicolare  $F$ , che ha per lati le parallele alle proiettrici tracciate dal polo  $O$  e connette le rette d'azione  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$  delle risultanti parziali



- Determinazione delle reazioni di chiave  $R_c$  e di rene  $R_r$

Mandando l'orizzontale  $r_c$  dal terzo medio superiore, si individua l'intersezione tra questa e la retta  $r$ ; per questo punto e per il terzo medio inferiore della sezione di rene passa la retta  $r_c$ , su cui giace la reazione  $R_r$ .

Scomponendo la risultante  $R$  nelle due direzioni così individuate, restano determinati i due vettori  $R_c$  e  $R_r$  in modulo, direzione e verso.

Si ha:

$$R_c = 57,5 \text{ kN}$$

$$R_r = 108 \text{ kN}$$



# ANDAMENTO DELLA SOLLECITAZIONE

Proiettando i vertici del poligono delle forze dal polo  $O'$  si ottiene il poligono delle successive risultanti dell'arco: la proiettante  $I = r_c$  è la somma delle forze che precedono la retta d'azione  $r_1$  delle forze che agiscono sul concio 1 (la sola  $R_c$ );

La proiettante  $II$  è la somma delle forze che precedono la retta d'azione  $r_2$  delle forze che agiscono sul concio 2 ( $R_c$  e  $R_1$ ), e così via.

Le successive proiettanti rappresentano dunque, in modulo, direzione e verso, le sollecitazioni che competono ai conci, mentre il poligono funicolare  $F'$  rappresenta la spezzata delle rette d'azione delle successive risultanti, che ne definisce l'andamento sull'arco.

Se questo fosse suddiviso in un numero infinito di conci, la spezzata sarebbe una curva continua, detta **curva delle pressioni**.

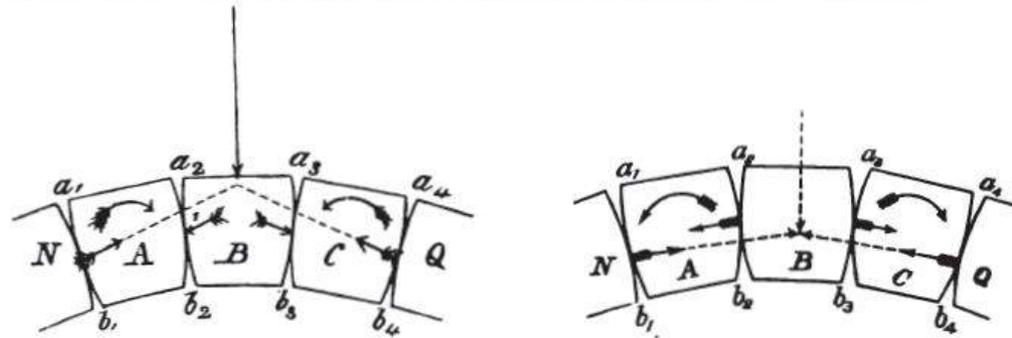
Fatta eccezione per la sezione di chiave, nella sezione generica dell'arco la sollecitazione è inclinata, producendo taglio e sforzo normale eccentrico; il centro di pressione si mantiene interno al terzo medio, o ne esce di poco.

**Se la curva delle pressioni si mantiene compresa nella striscia dei terzi medi, il centro di pressione è in ogni sezione interno al nocciolo centrale d'inerzia.**

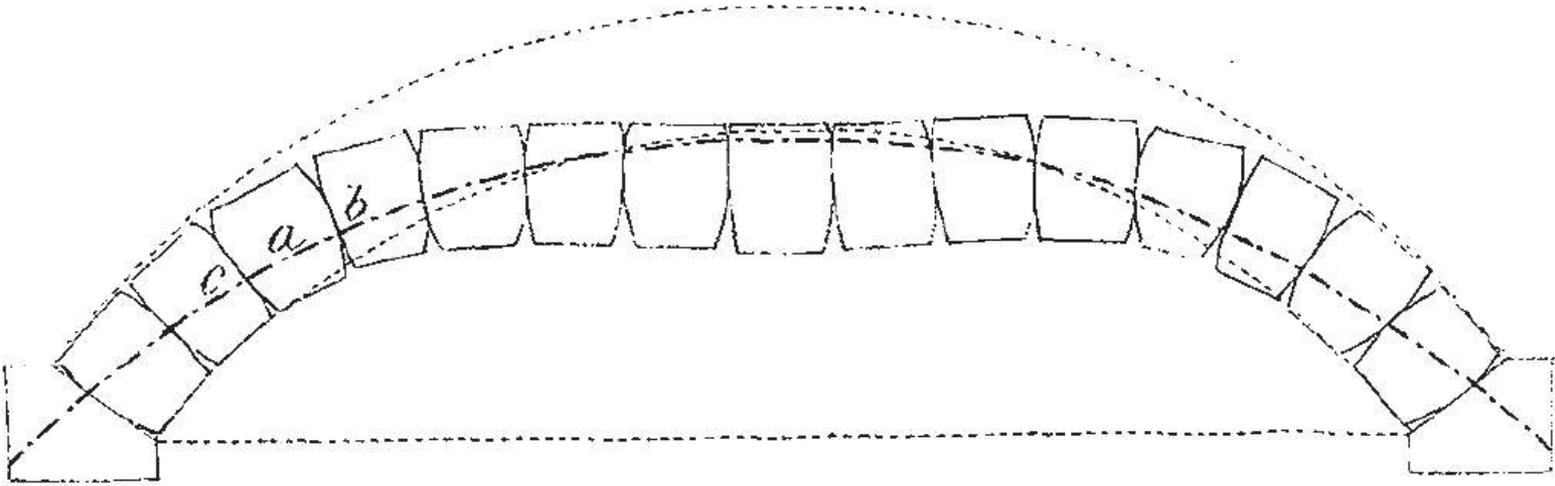
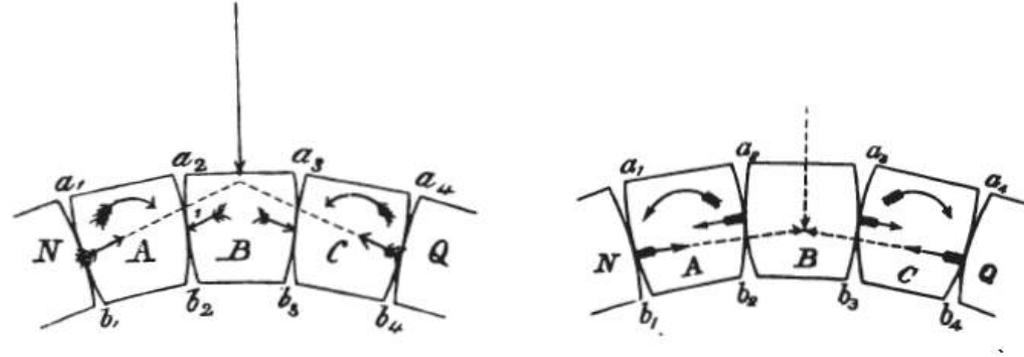
Tutte le sezioni dell'arco sono soggette, oltre che a modesti sforzi di taglio, a sola compressione.

Il funzionamento dell'arco è dunque profondamente diverso da quello della trave. Nella trave la sezione generica è inflessa ( $M + V$ ) e deve quindi essere costruita con materiali resistenti anche a trazione e a taglio; nell'arco, tutte le sezioni sono prevalentemente compresse e gli elementi resistenti, opportunamente disposti, possono sostenersi per reciproco contrasto.

## Existence of the line of equal horizontal thrust in arches

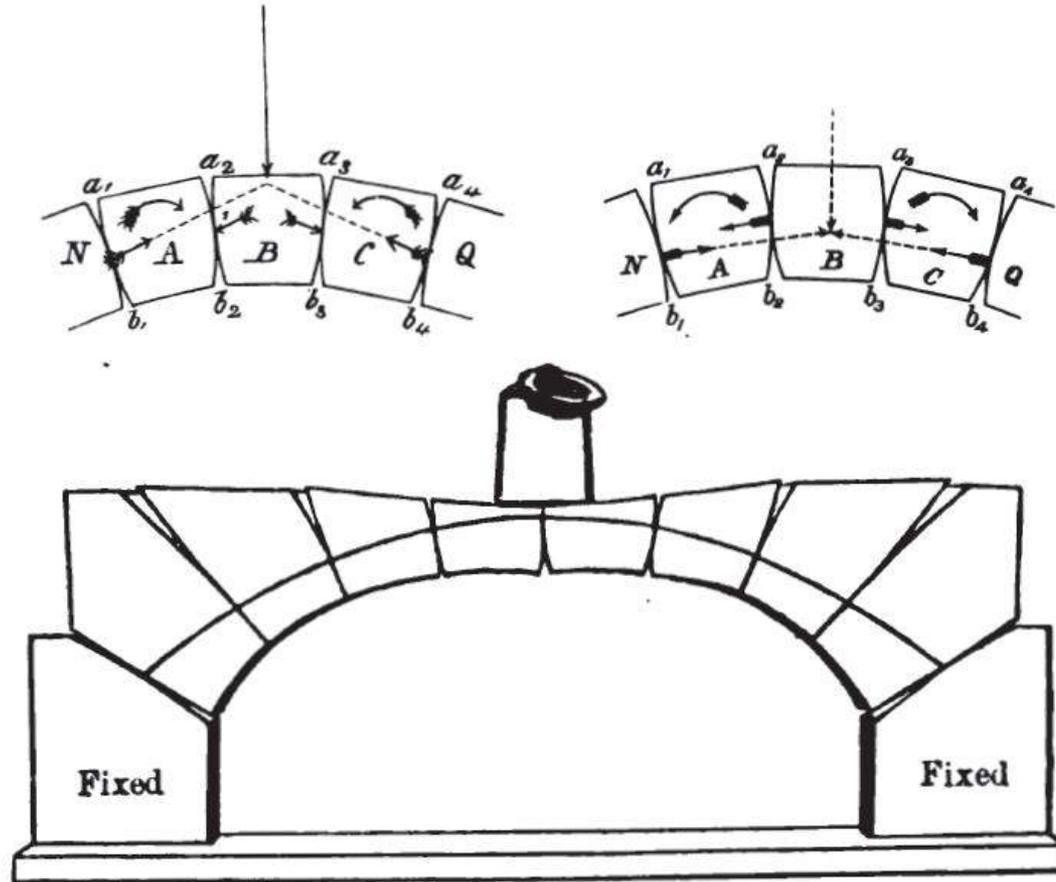


## Existence of the line of equal horizontal thrust in arches

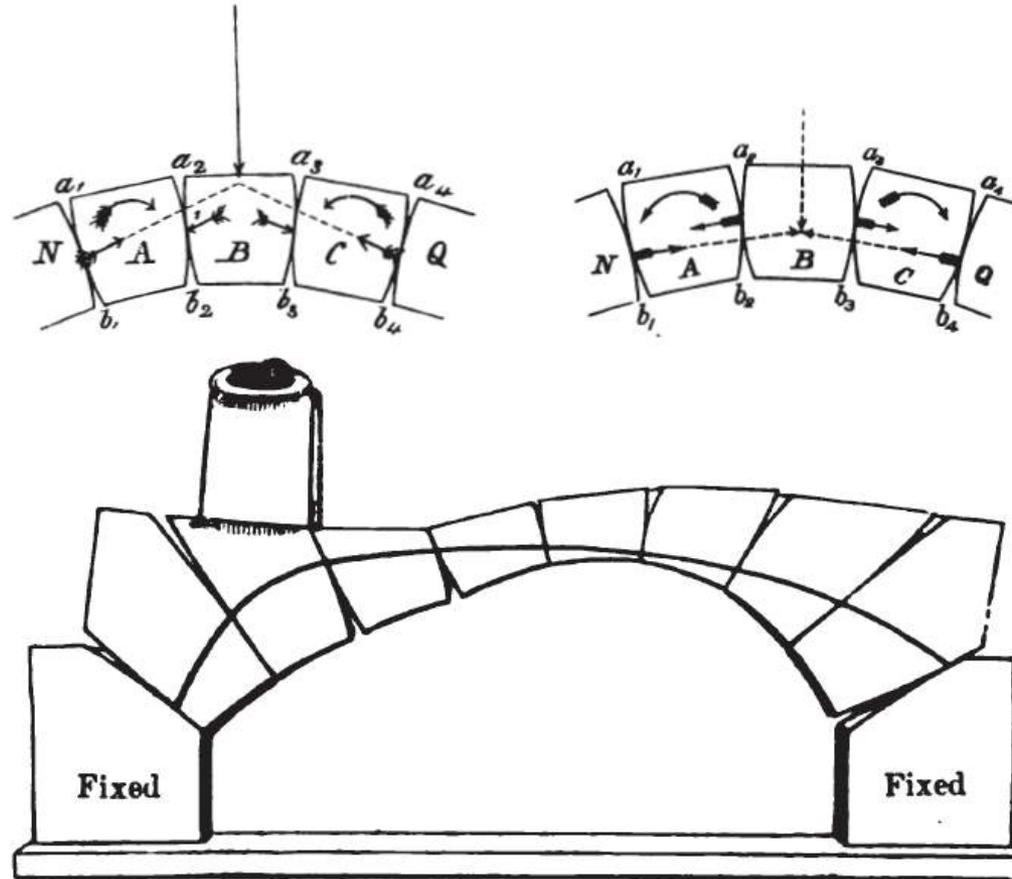


Barlow 1846

## Existence of the line of equal horizontal thrust in arches

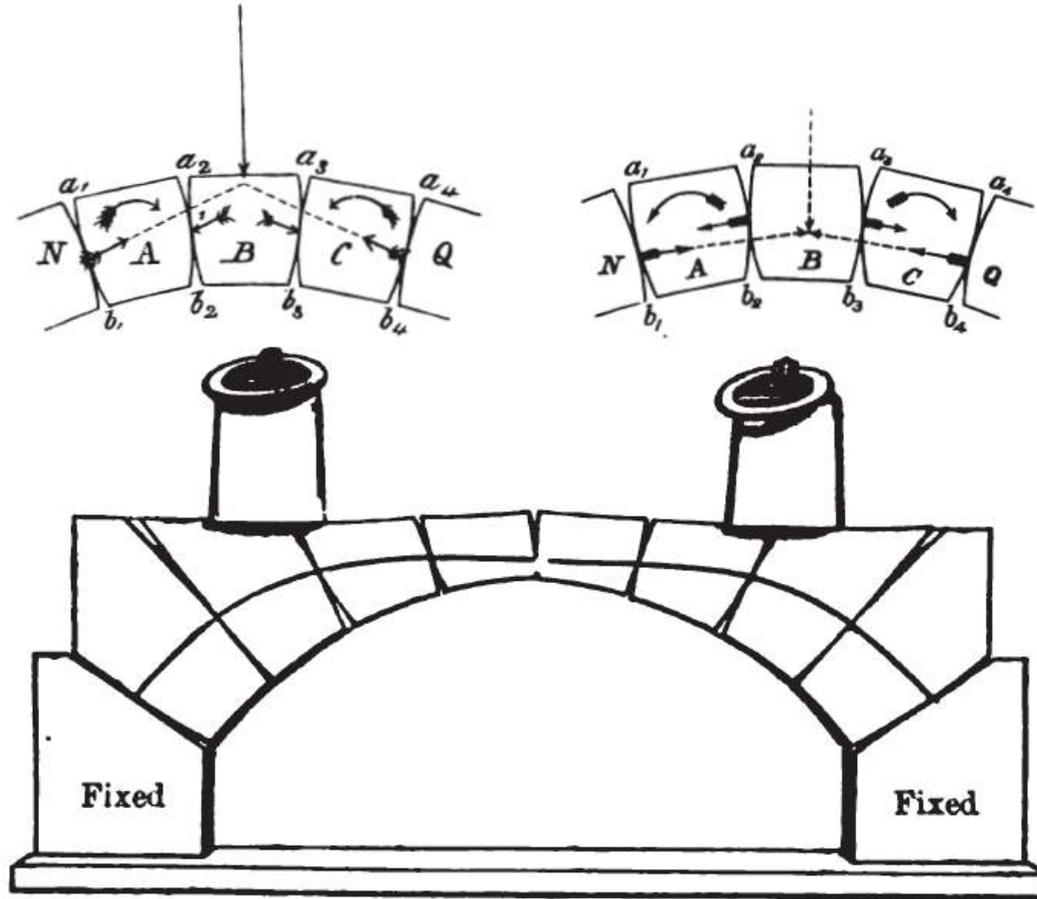


## Existence of the line of equal horizontal thrust in arches

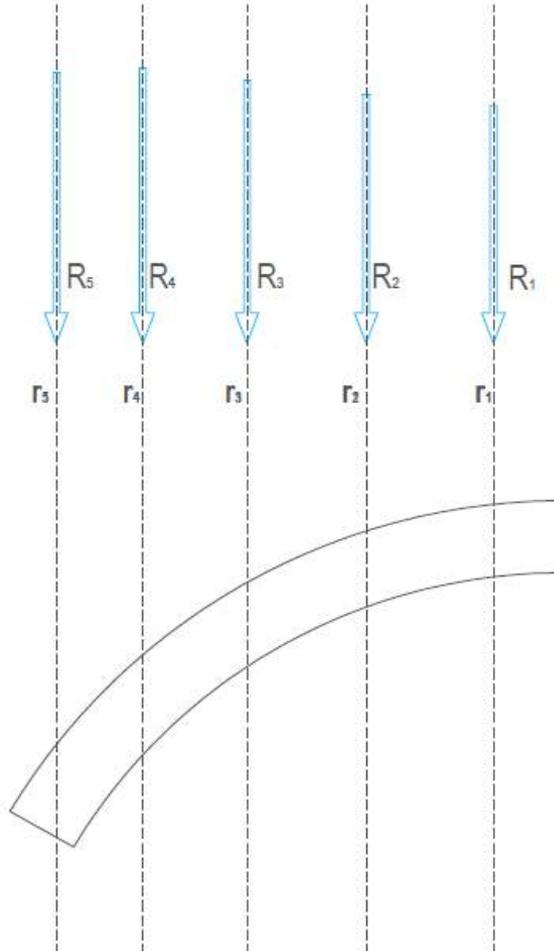


Jenkin 1776

## Existence of the line of equal horizontal thrust in arches



Jenkin 1776



$$R_1 = 16.72 \text{ kN}$$

$$R_2 = 17.47 \text{ kN}$$

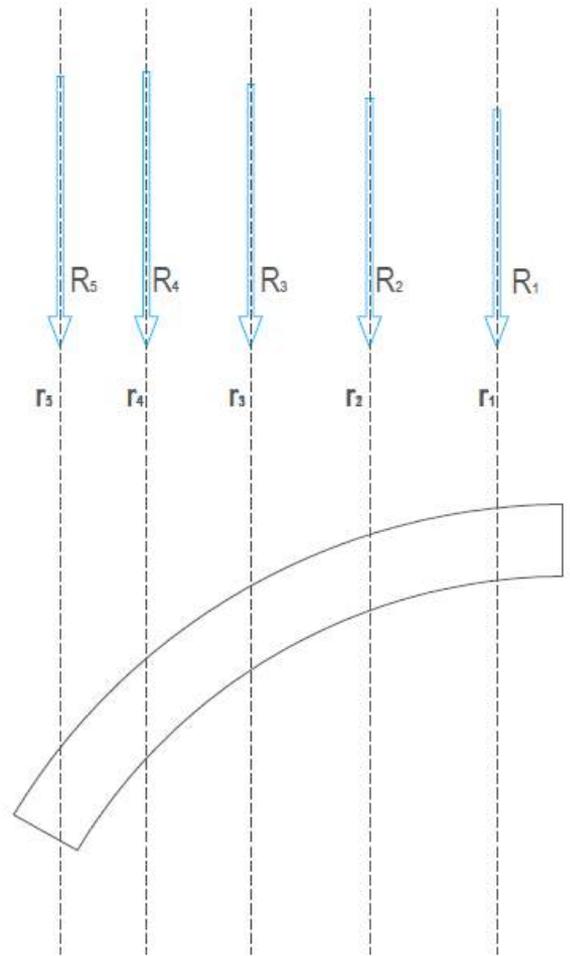
$$R_3 = 18.57 \text{ kN}$$

$$R_4 = 19.43 \text{ kN}$$

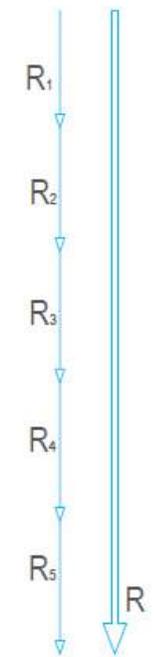
$$R_5 = 19.12 \text{ kN}$$

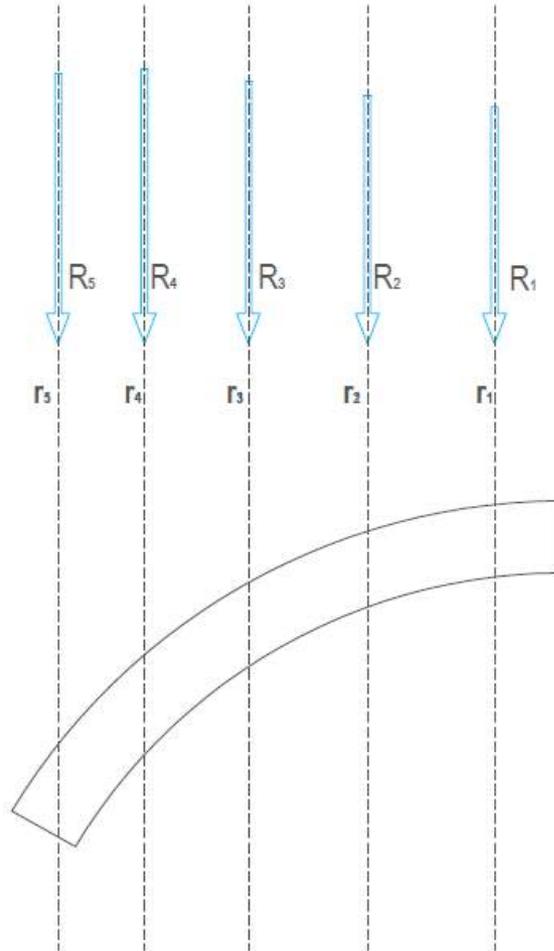
$$R = 91.31 \text{ kN}$$

# Poligono funicolare



- $R_1=16.72$  kN
- $R_2=17.47$  kN
- $R_3=18.57$  kN
- $R_4=19.43$  kN
- $R_5=19.12$  kN
  
- $R=91.31$  kN





$$R_1 = 16.72 \text{ kN}$$

$$R_2 = 17.47 \text{ kN}$$

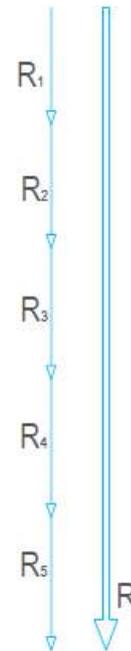
$$R_3 = 18.57 \text{ kN}$$

$$R_4 = 19.43 \text{ kN}$$

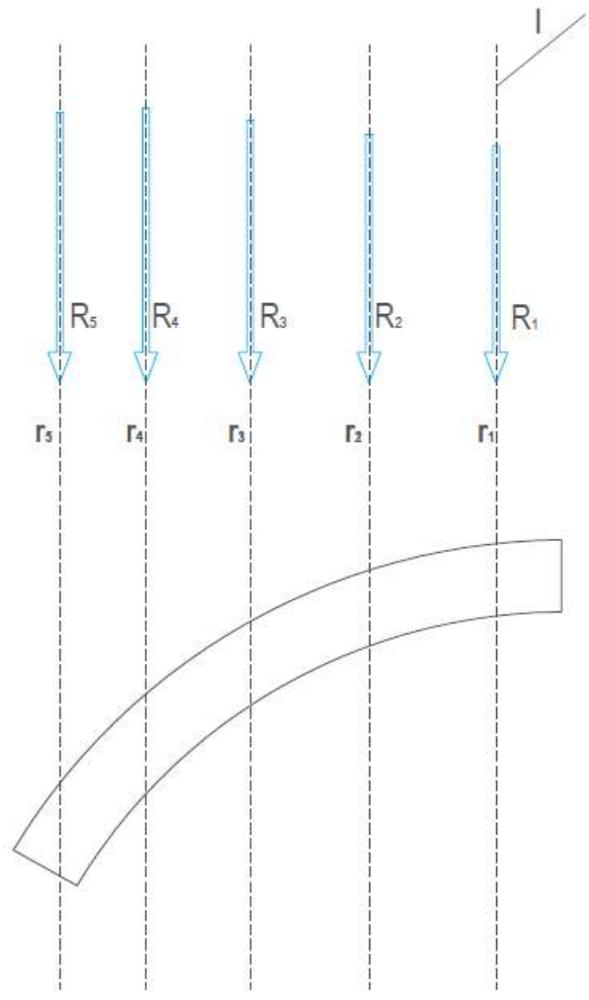
$$R_5 = 19.12 \text{ kN}$$

$$R = 91.31 \text{ kN}$$

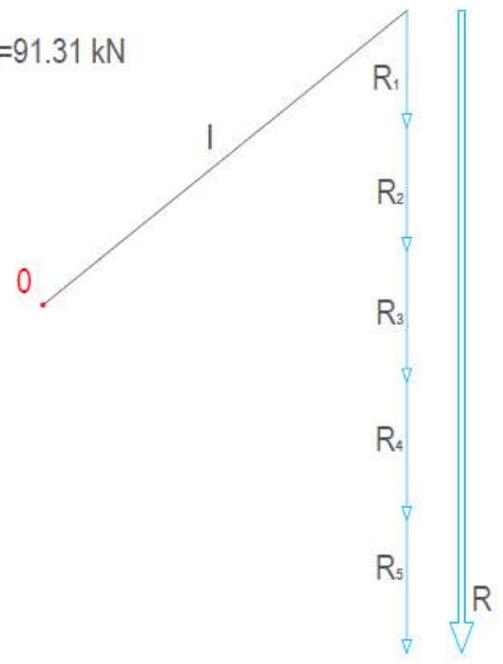
0.



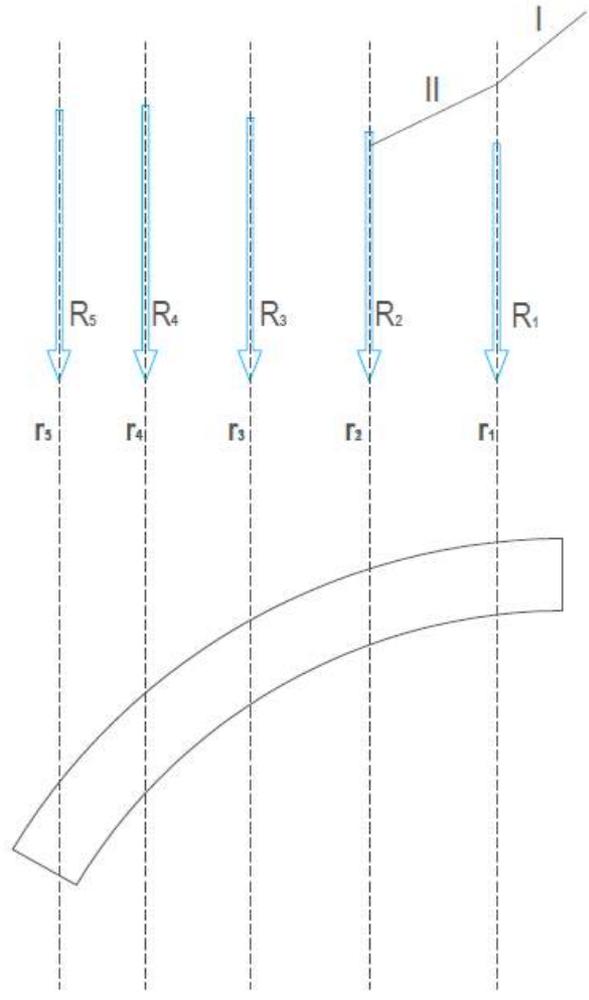
# Poligono funicolare



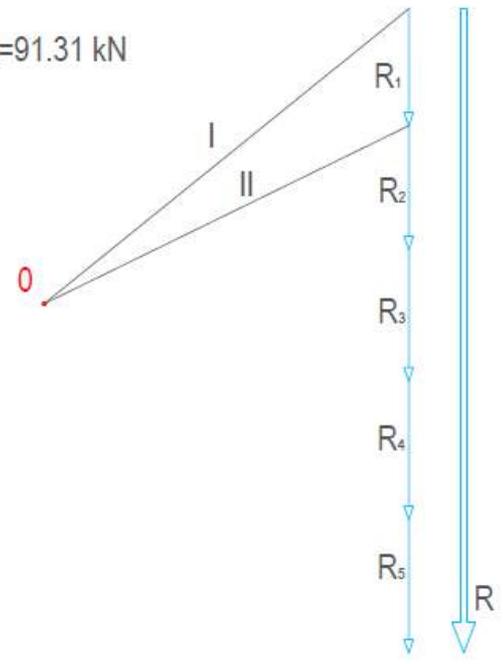
- $R_1 = 16.72 \text{ kN}$
- $R_2 = 17.47 \text{ kN}$
- $R_3 = 18.57 \text{ kN}$
- $R_4 = 19.43 \text{ kN}$
- $R_5 = 19.12 \text{ kN}$
- $R = 91.31 \text{ kN}$

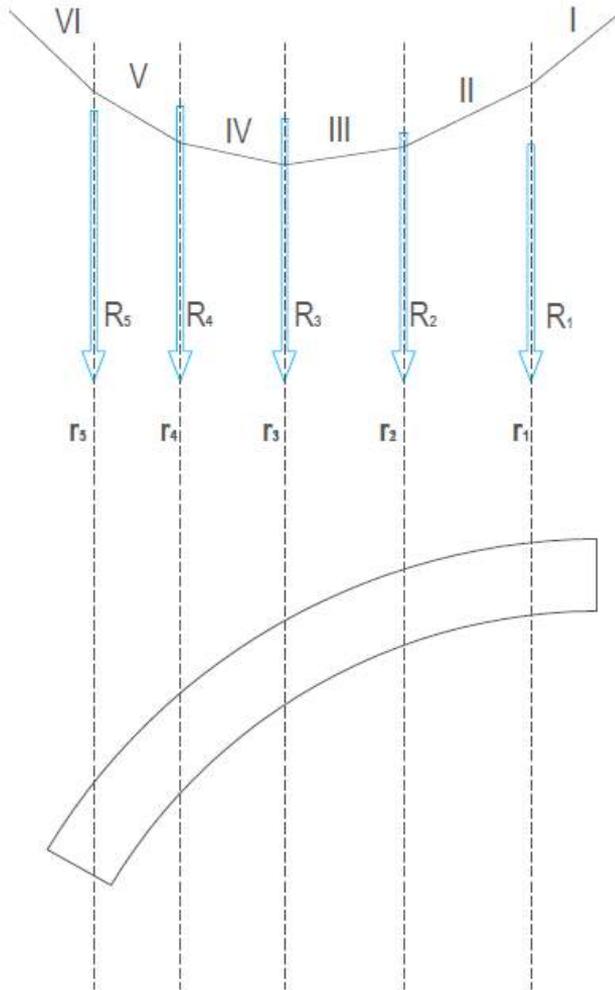


# Poligono funicolare

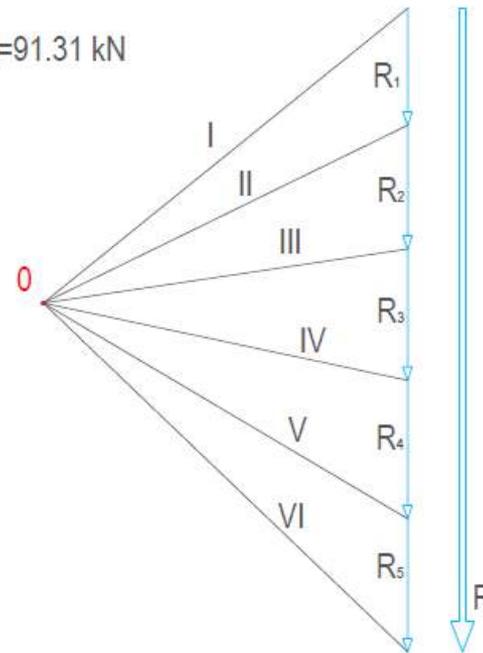


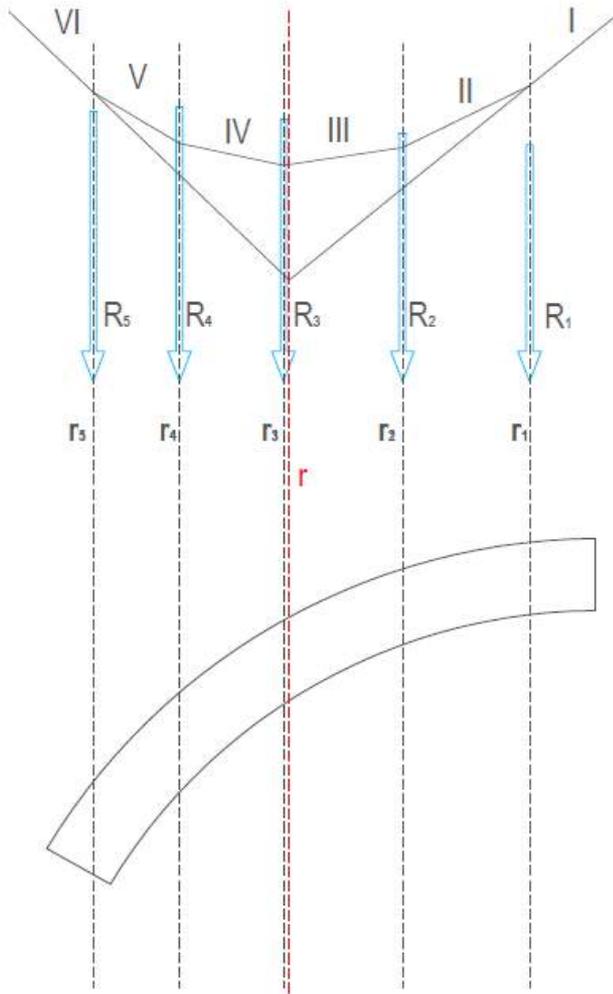
- $R_1 = 16.72 \text{ kN}$
- $R_2 = 17.47 \text{ kN}$
- $R_3 = 18.57 \text{ kN}$
- $R_4 = 19.43 \text{ kN}$
- $R_5 = 19.12 \text{ kN}$
- $R = 91.31 \text{ kN}$





- $R_1=16.72$  kN
- $R_2=17.47$  kN
- $R_3=18.57$  kN
- $R_4=19.43$  kN
- $R_5=19.12$  kN
- $R=91.31$  kN





$$R_1 = 16.72 \text{ kN}$$

$$R_2 = 17.47 \text{ kN}$$

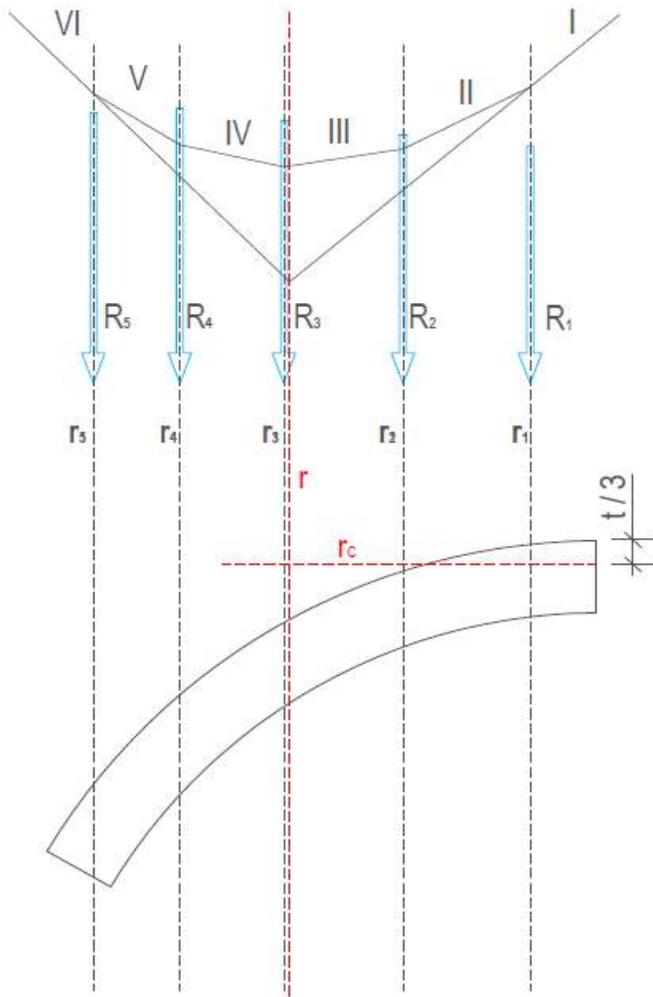
$$R_3 = 18.57 \text{ kN}$$

$$R_4 = 19.43 \text{ kN}$$

$$R_5 = 19.12 \text{ kN}$$

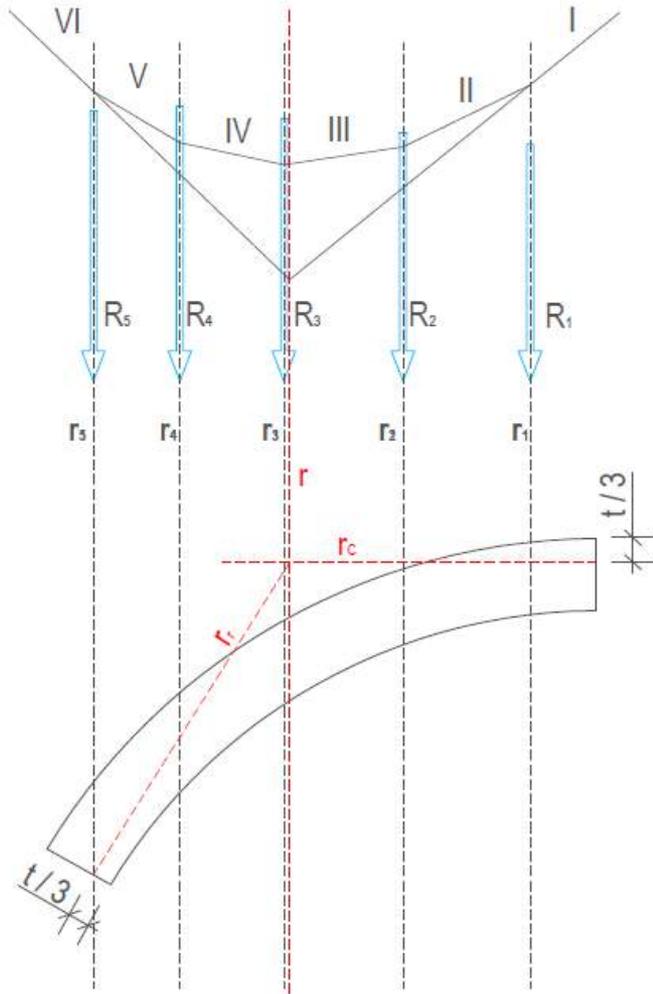
$$R = 91.31 \text{ kN}$$



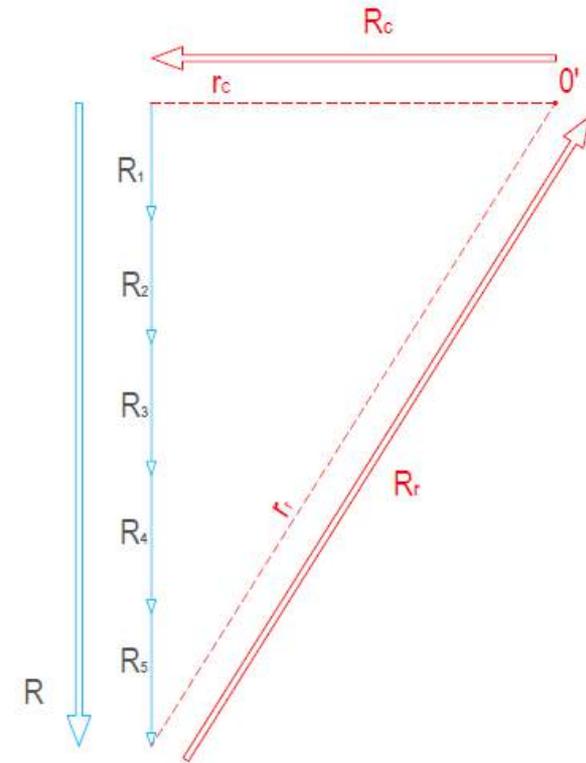


- $R_1=16.72$  kN
- $R_2=17.47$  kN
- $R_3=18.57$  kN
- $R_4=19.43$  kN
- $R_5=19.12$  kN
- $R=91.31$  kN

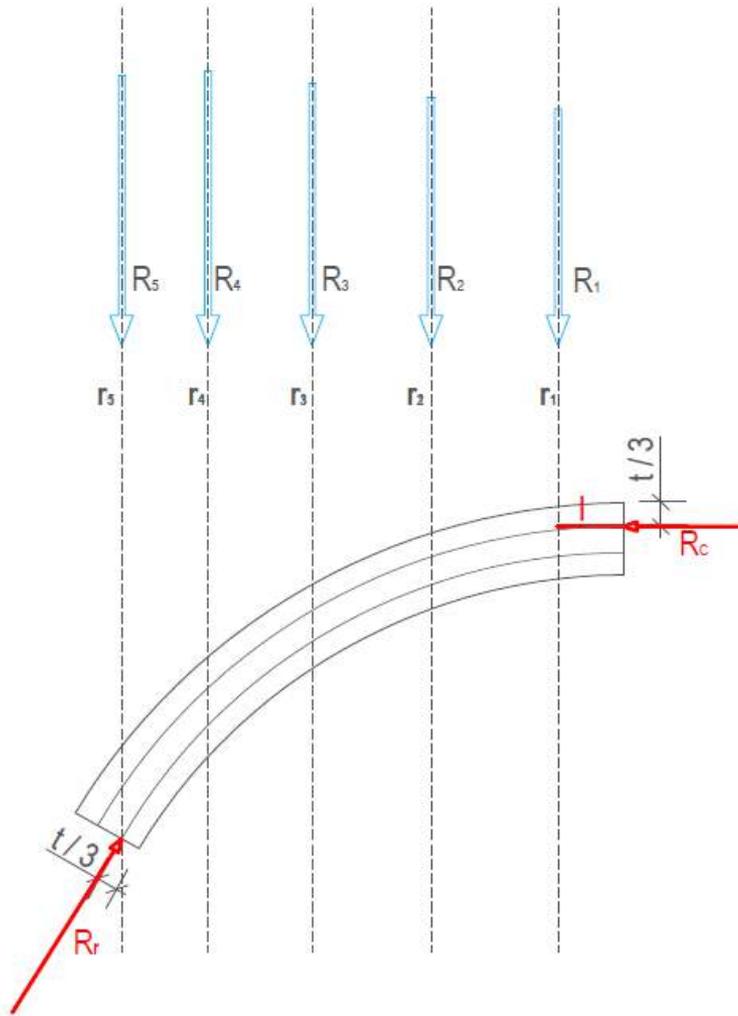




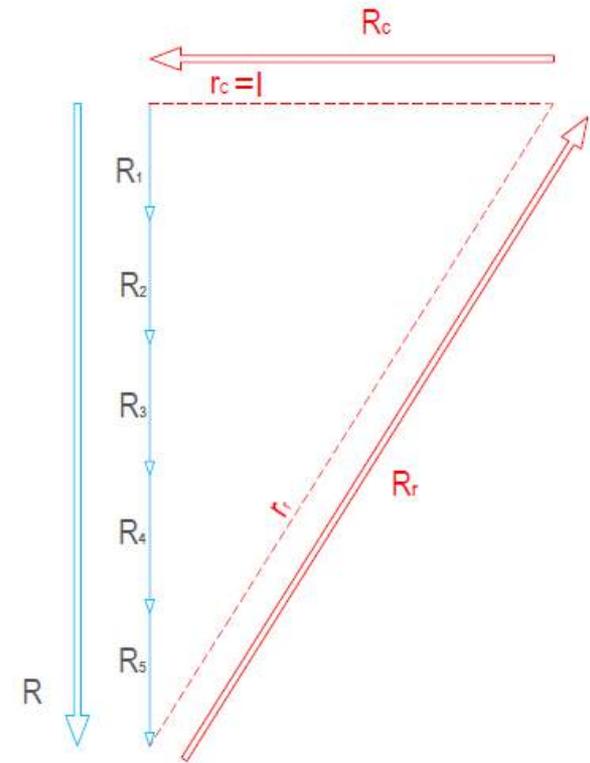
- $R_1=16.72$  kN
- $R_2=17.47$  kN
- $R_3=18.57$  kN
- $R_4=19.43$  kN
- $R_5=19.12$  kN
- $R=91.31$  kN



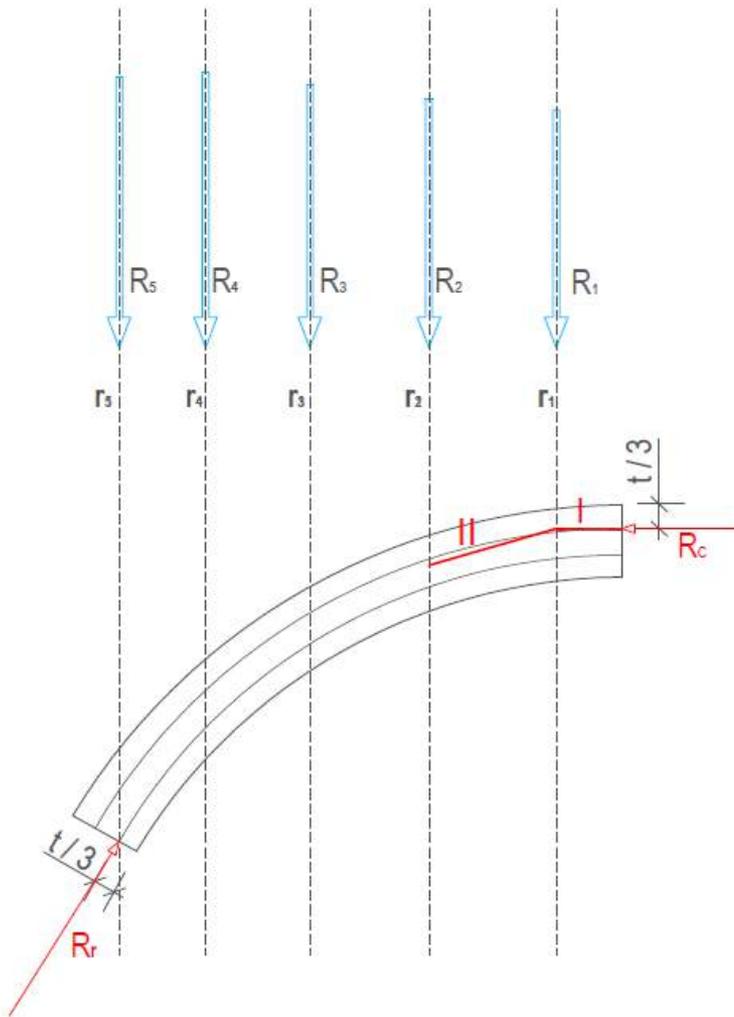
# Poligono funicolare



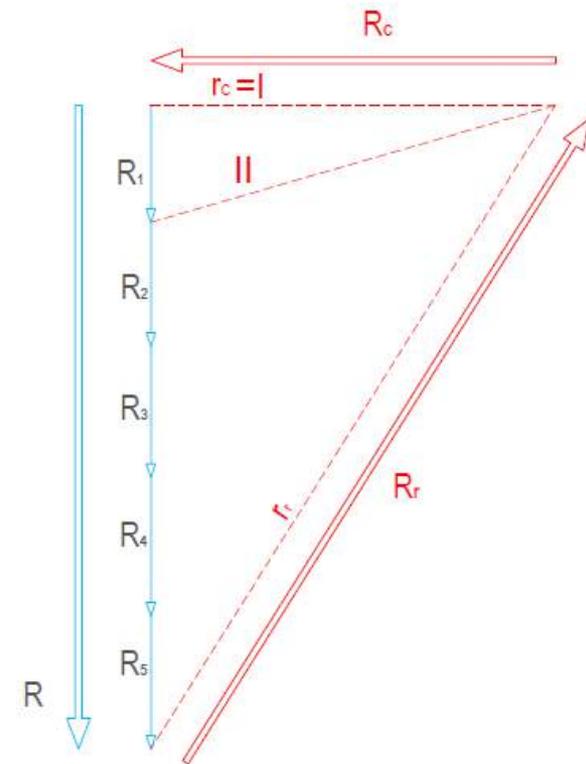
- $R_1=16.72$  kN
- $R_2=17.47$  kN
- $R_3=18.57$  kN
- $R_4=19.43$  kN
- $R_5=19.12$  kN
- $R=91.31$  kN



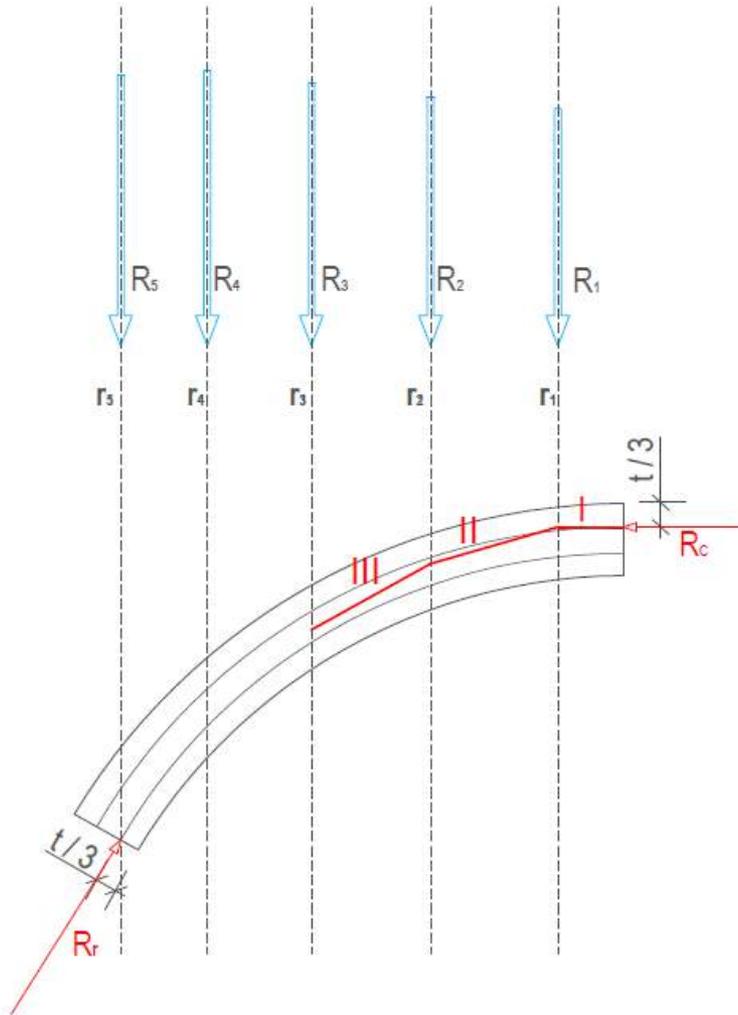
# Poligono funicolare



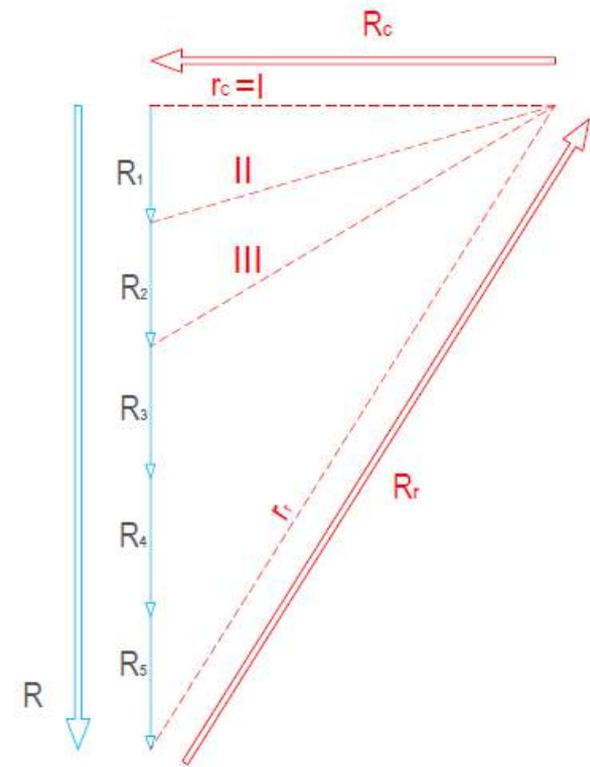
- $R_1=16.72$  kN
- $R_2=17.47$  kN
- $R_3=18.57$  kN
- $R_4=19.43$  kN
- $R_5=19.12$  kN
- $R=91.31$  kN

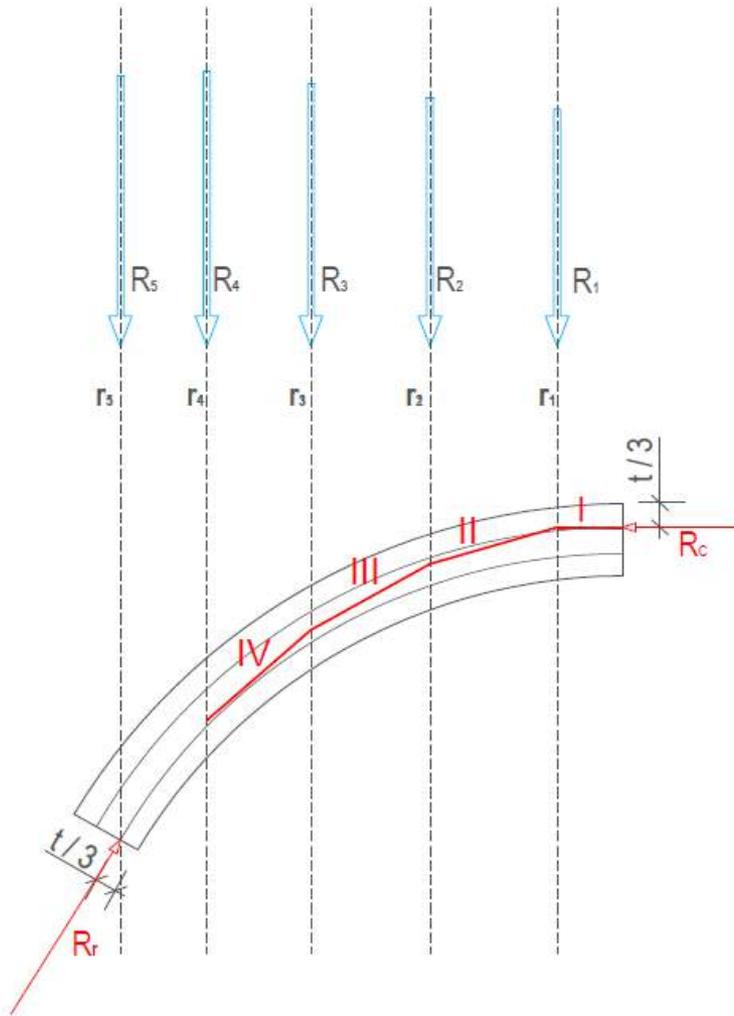


# Poligono funicolare

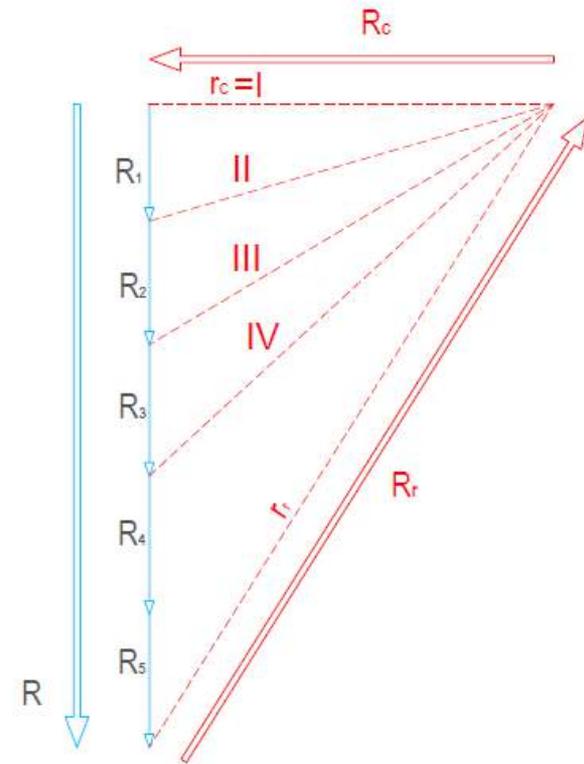


- $R_1=16.72$  kN
- $R_2=17.47$  kN
- $R_3=18.57$  kN
- $R_4=19.43$  kN
- $R_5=19.12$  kN
- $R=91.31$  kN

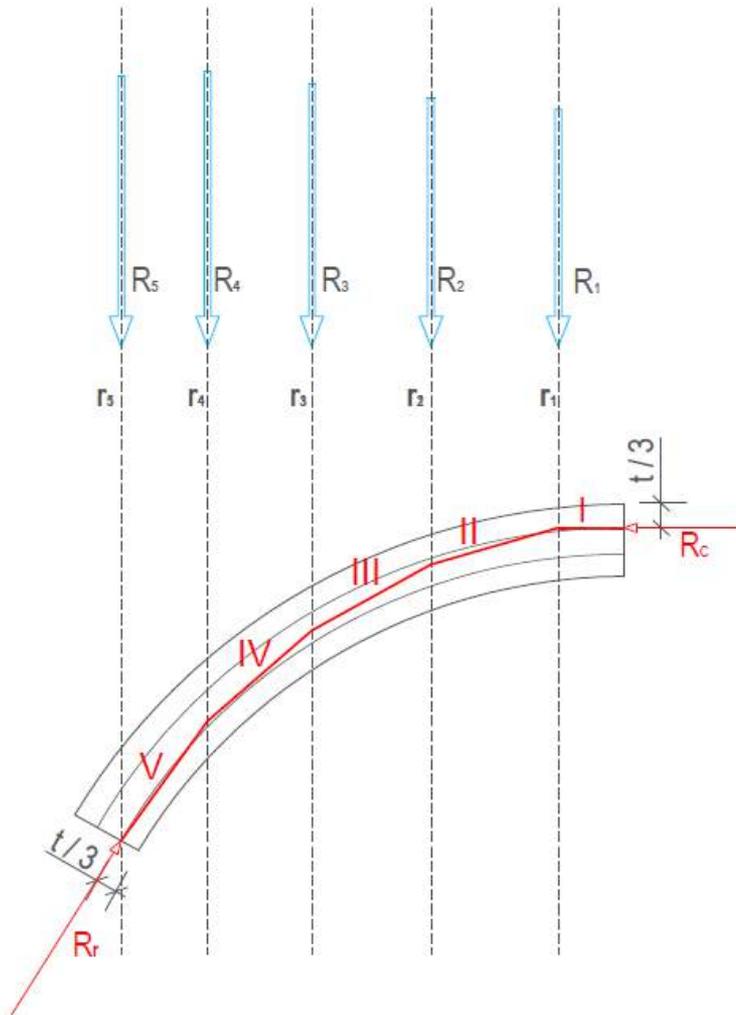




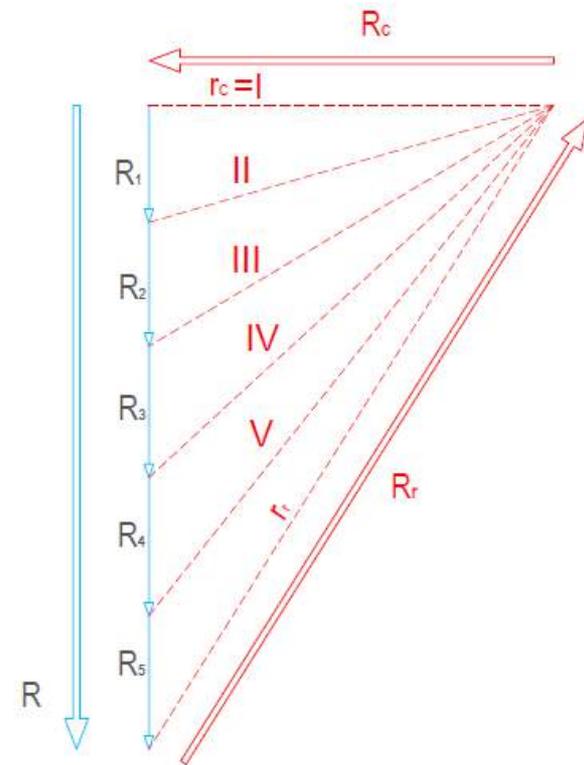
- $R_1=16.72$  kN
- $R_2=17.47$  kN
- $R_3=18.57$  kN
- $R_4=19.43$  kN
- $R_5=19.12$  kN
- $R=91.31$  kN



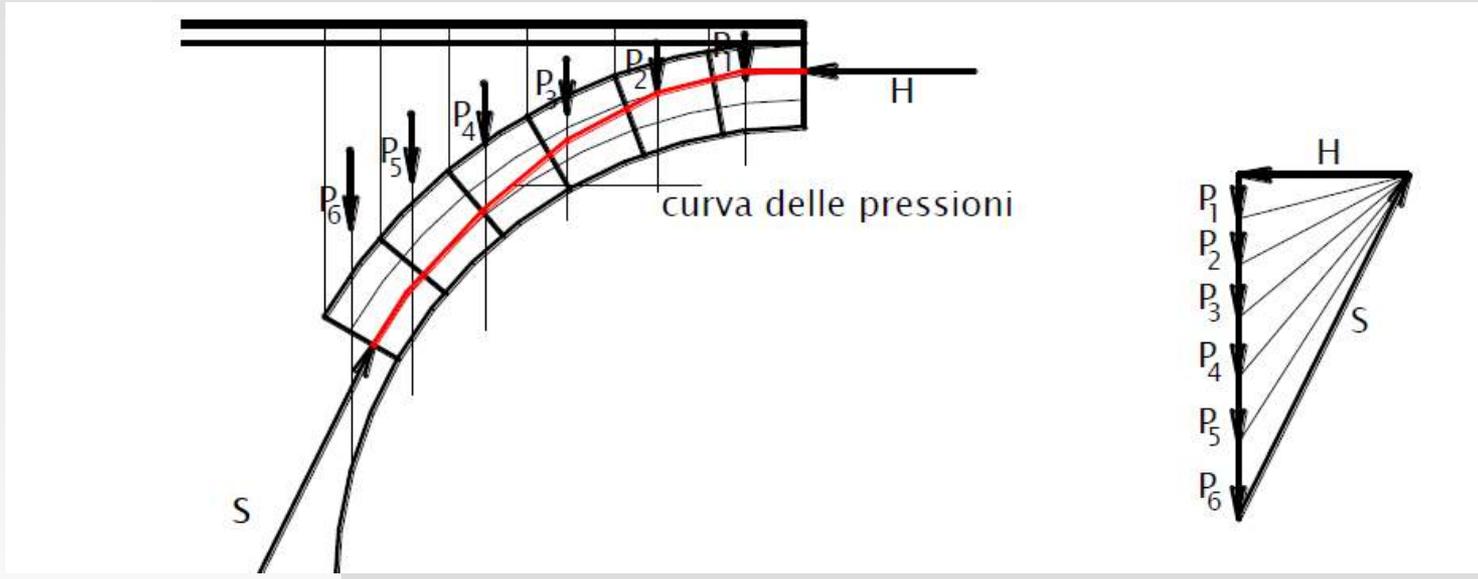
# Poligono funicolare



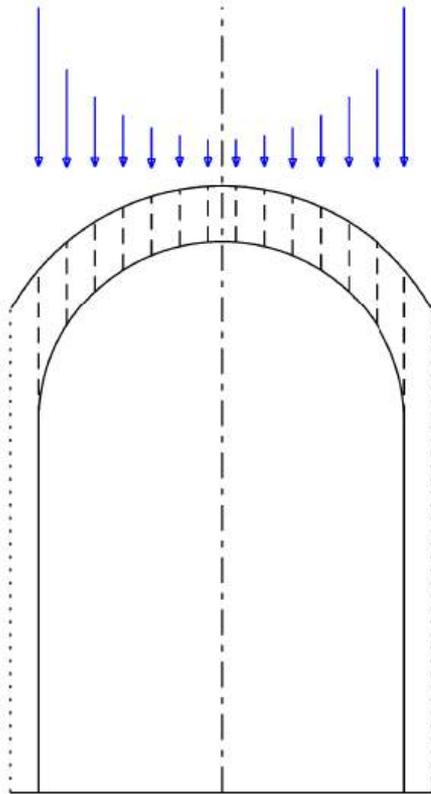
- $R_1=16.72 \text{ kN}$
- $R_2=17.47 \text{ kN}$
- $R_3=18.57 \text{ kN}$
- $R_4=19.43 \text{ kN}$
- $R_5=19.12 \text{ kN}$
- $R=91.31 \text{ kN}$



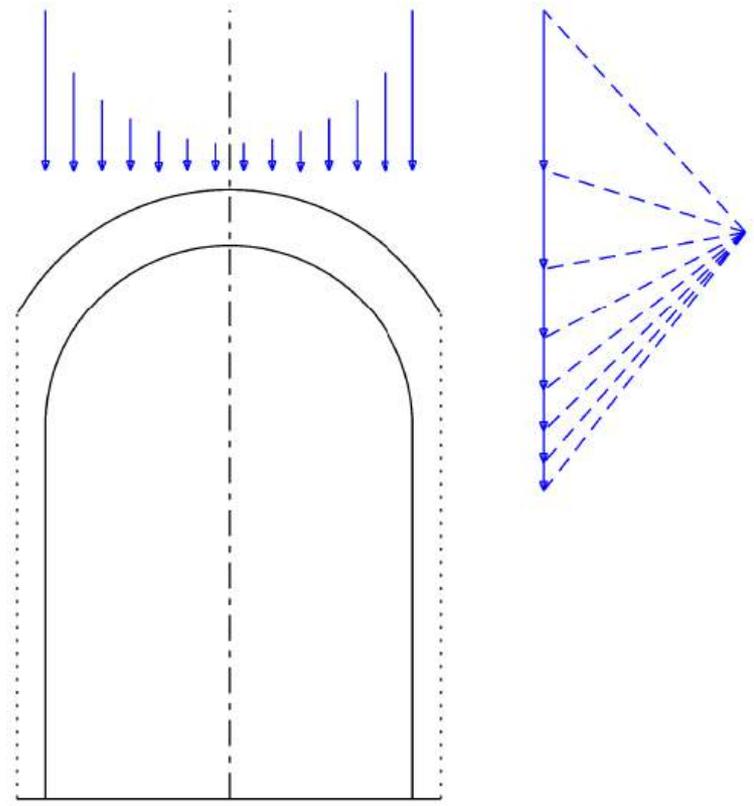
# Poligono funicolare



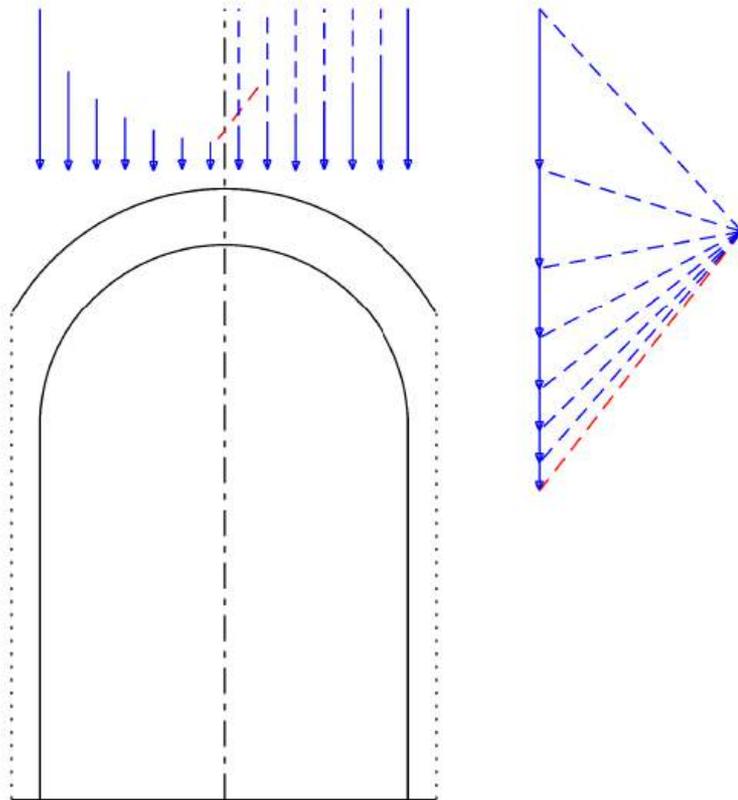
## Graphic determination of a funicular polygon



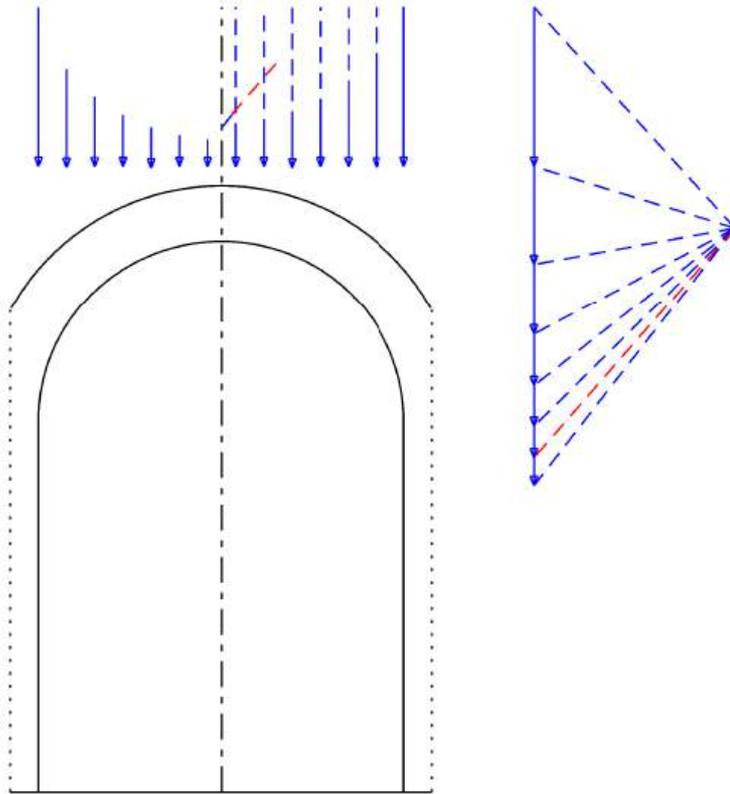
## Graphic determination of a funicular polygon



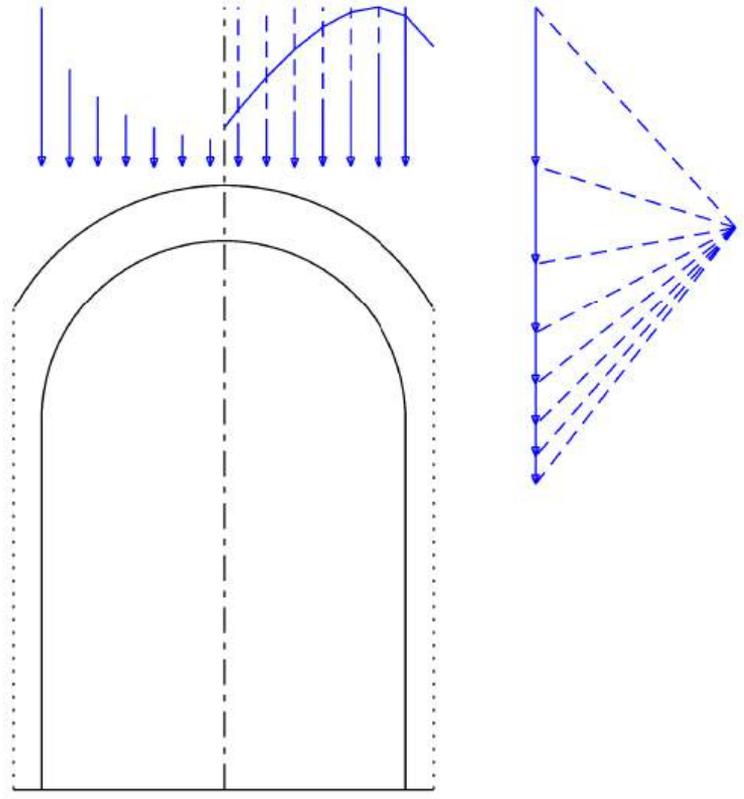
## Graphic determination of a funicular polygon



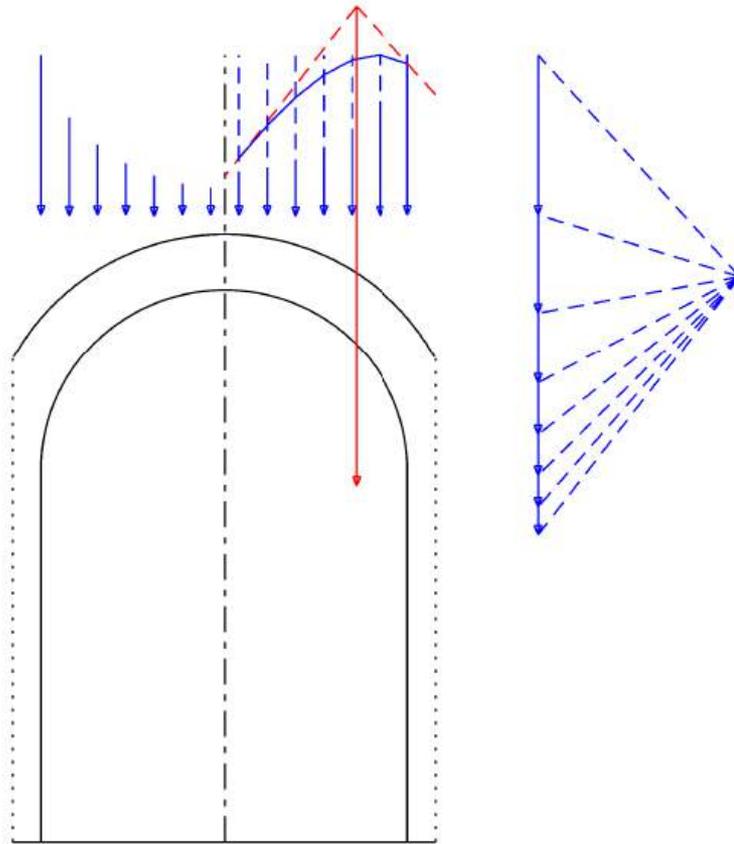
## Graphic determination of a funicular polygon



## Graphic determination of a funicular polygon

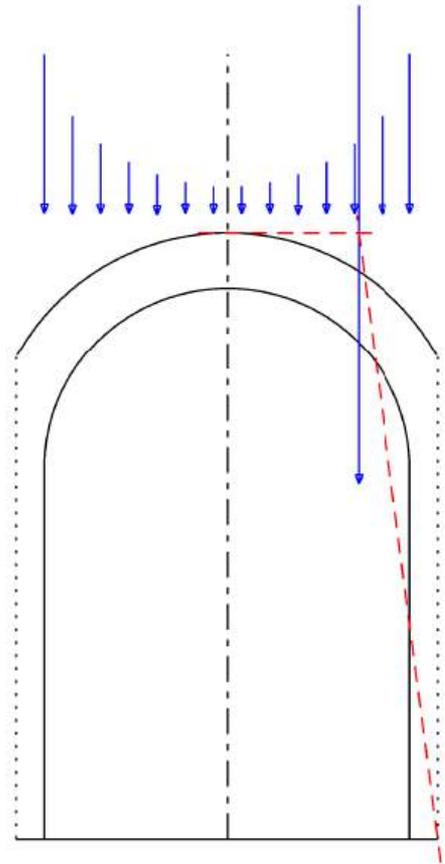


## Graphic determination of a funicular polygon

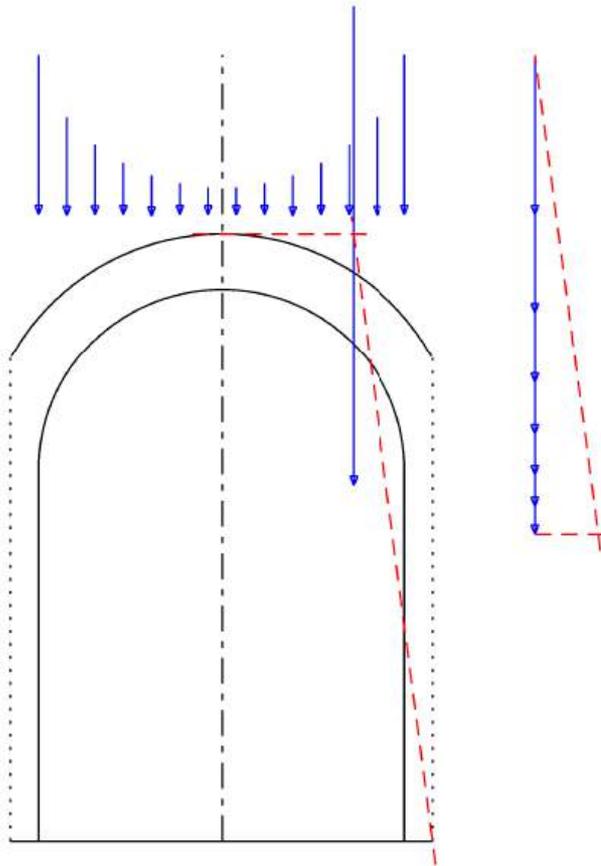




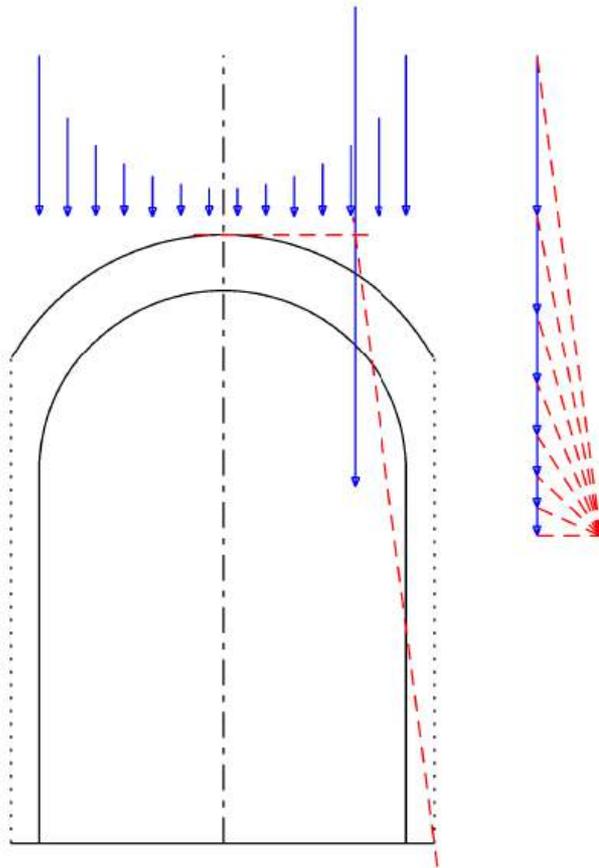
## Graphic determination of a funicular polygon



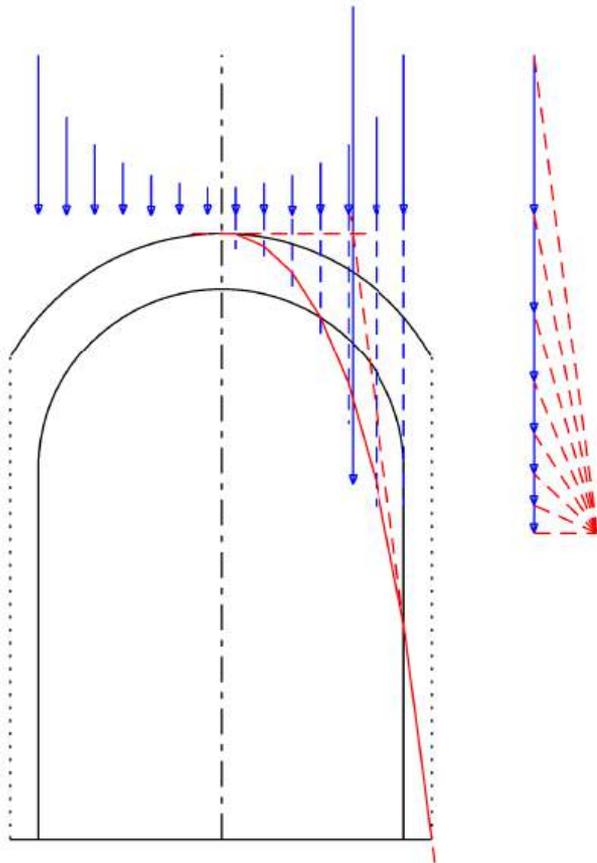
## Graphic determination of a funicular polygon



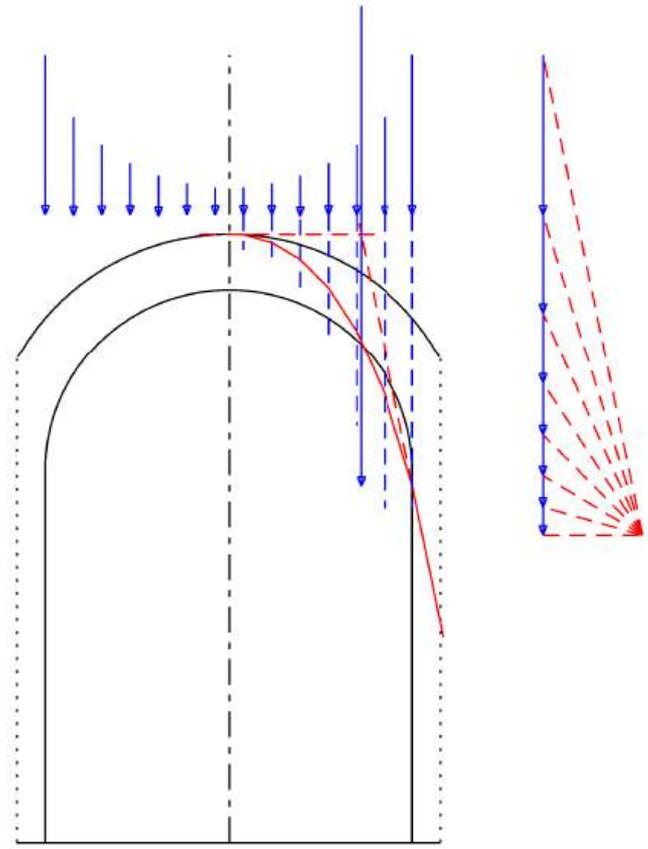
## Graphic determination of a funicular polygon



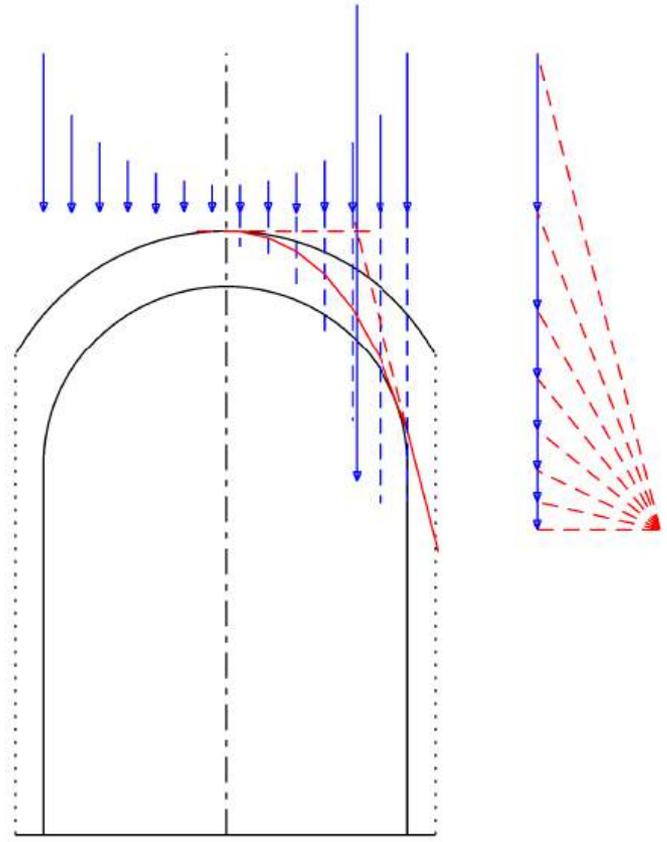
## Graphic determination of a funicular polygon



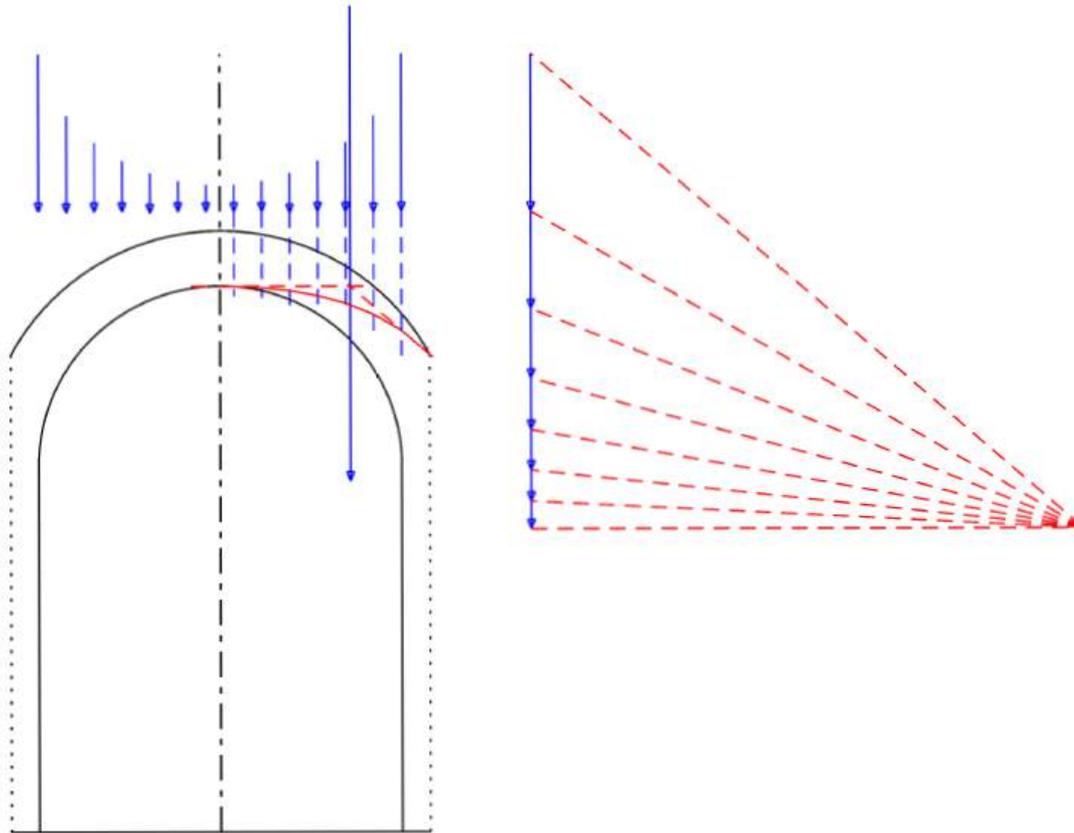
## Graphic determination of a funicular polygon



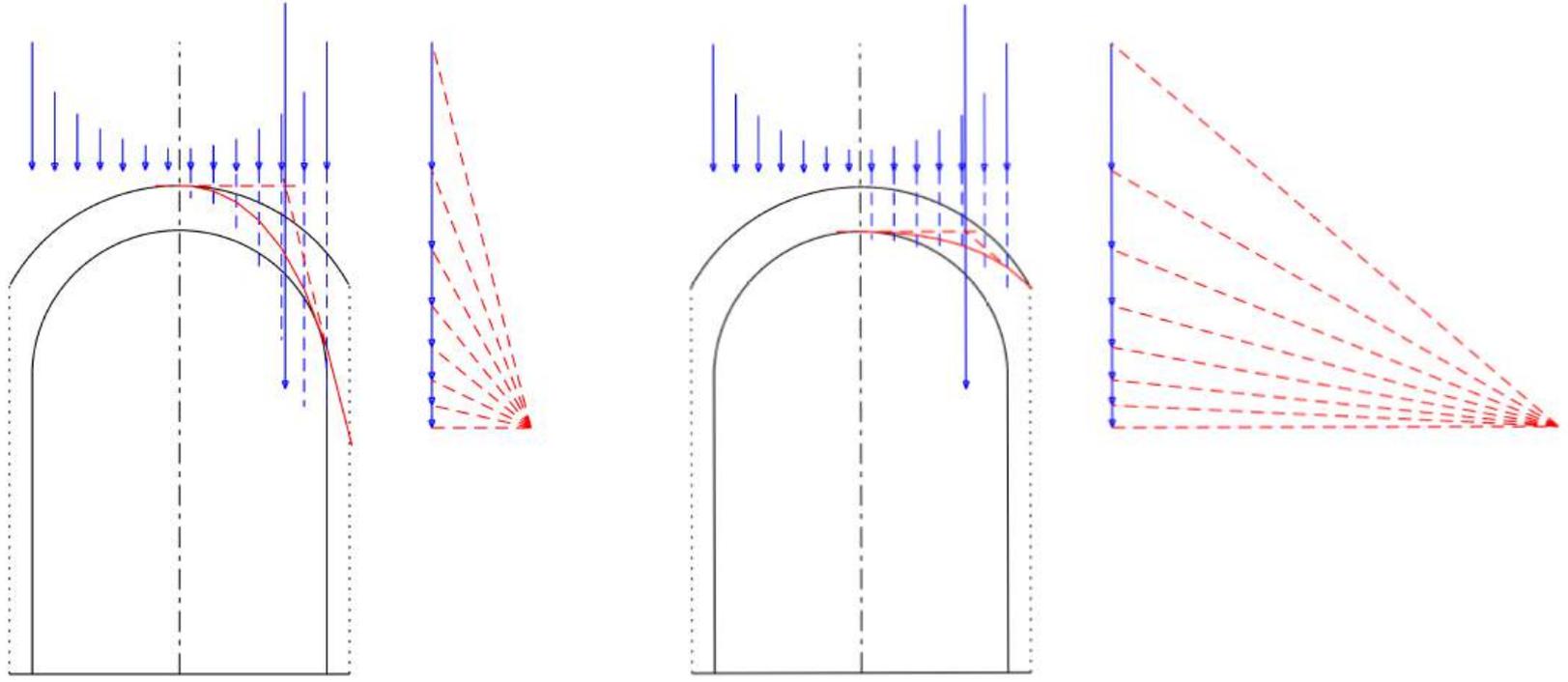
## Graphic determination of a funicular polygon



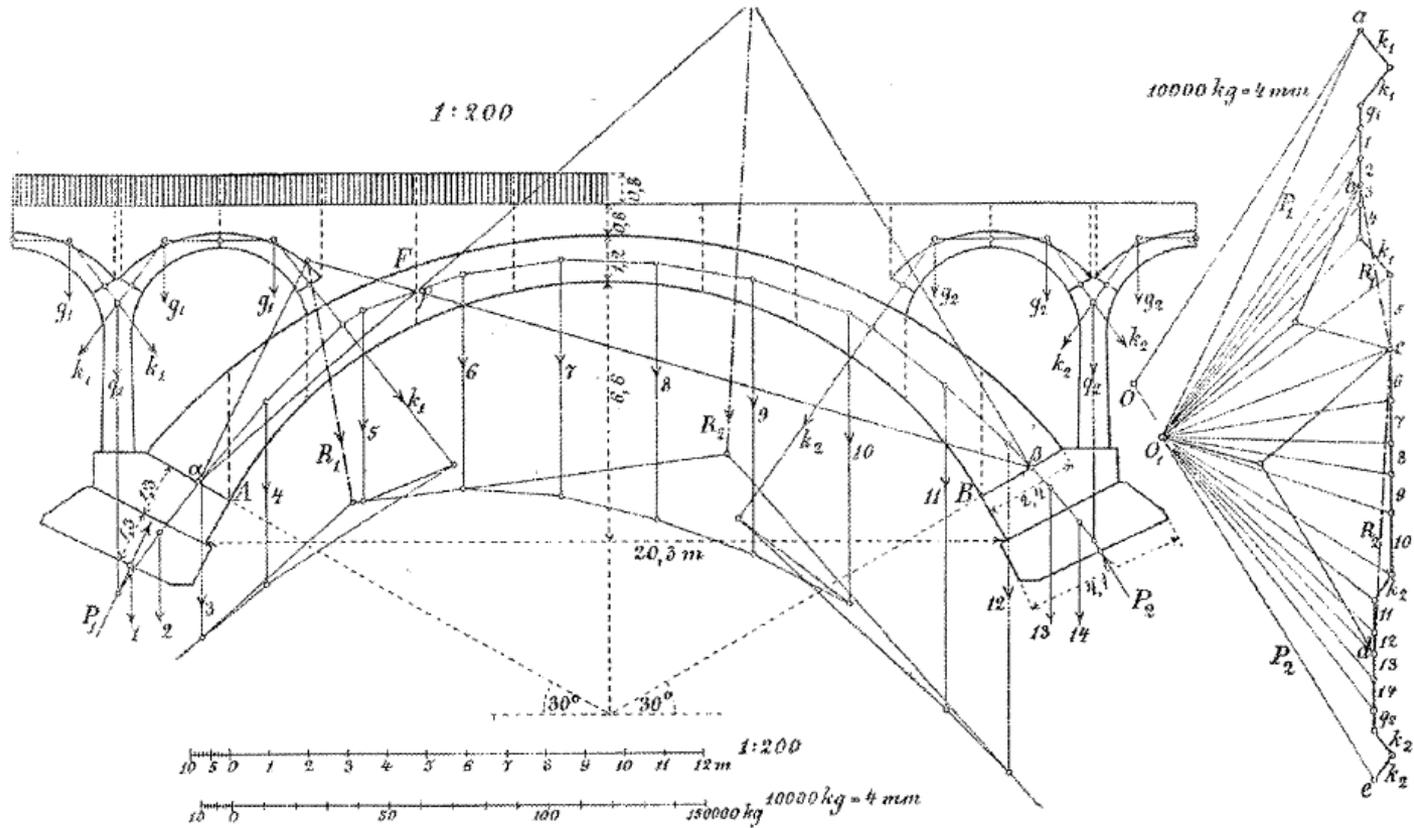
## Graphic determination of a funicular polygon



## Graphic determination of a funicular polygon



## Graphic analysis by the funicular polygon



## An analogy with cables

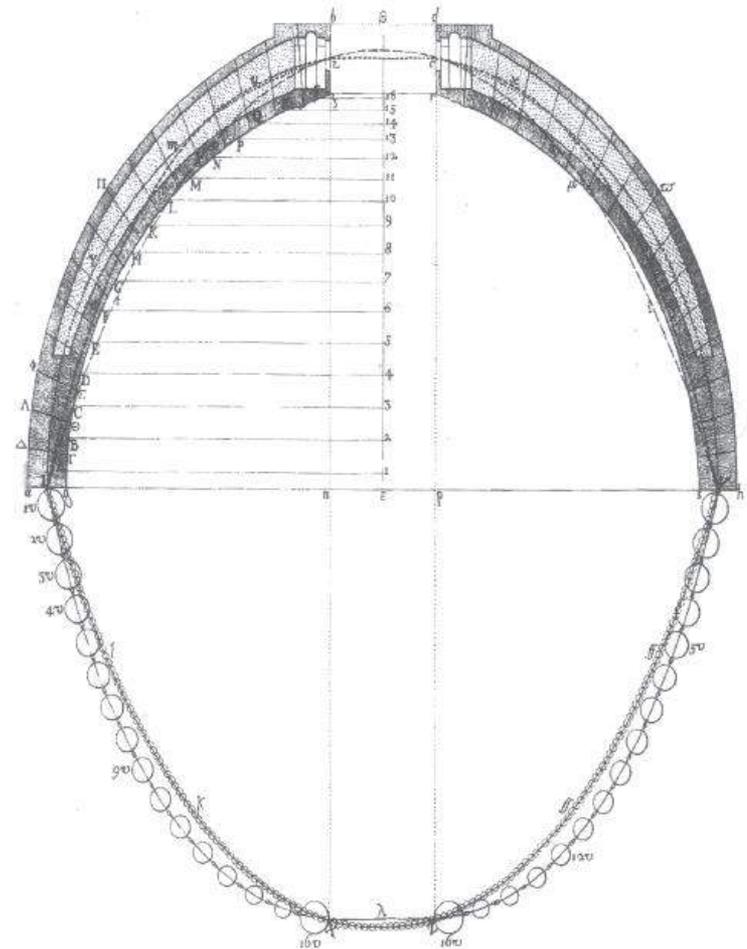
2. *The true Mathematical and Mechanical form of all manner of Arches for Building, with the true buttment necessary to each of them. A Problem which no Architectonick Writer hath ever yet attempted, much less performed.* abcce ddeeee fgg iiiiiii lmmmmnnnnnoopr ssstttttuuuuuuux.

Hooke 1676

Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum  
inversum

which translates to

As hangs a flexible cable so, inverted, stand the touching pieces  
of an arch



Poleni 1748

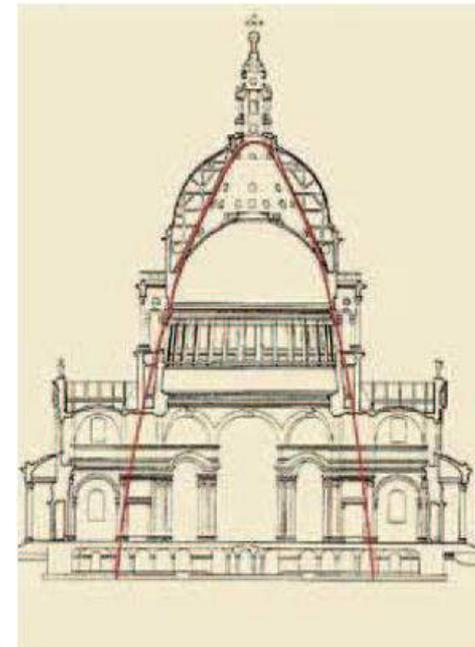
## Il XVII secolo: Il concetto di catenaria

Hooke, padre della teoria dell'elasticità dei corpi ( *"ut tensio sic vis!"* ) spiega, sulla base delle osservazioni effettuate con la fune, con queste semplici parole: *"Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum"*

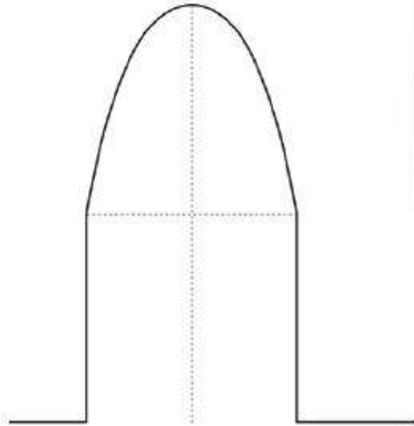


*"Niente come la catenaria, riesce meglio a descrivere la forma più corretta che un arco possa avere. Inoltre, il motivo per cui un l'arco di una qualsiasi forma riesce a mantenersi risiede nel fatto che è possibile trovare una serie di catenarie al suo interno"* [Gregory1697]

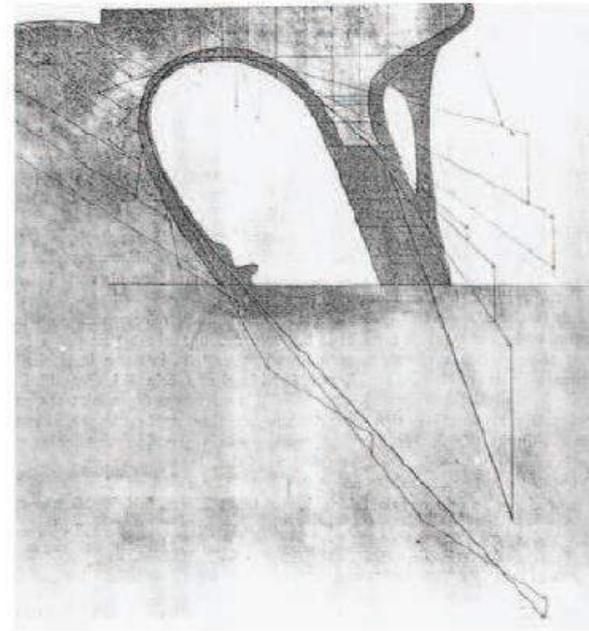
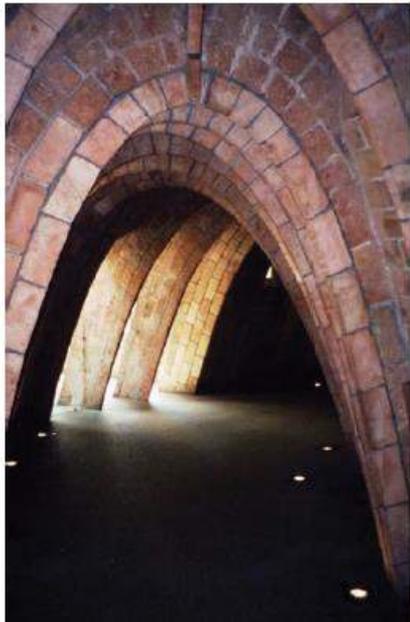
In particolare l'arco catenario o detto anche arco equilibrato perché la sua forma consente una omogenea redistribuzione del carico, a differenza di altri tipi di archi. Questo tipo di curva è stata spesso utilizzata per realizzare edifici architettonici. Le strutture realizzate secondo tale curva subiscono soltanto sforzi a trazione, come le funi di sostegno nei ponti sospesi, oppure, in alternativa, a compressione, quando la struttura realizzata ha la forma di una catenaria riflessa rispetto ad una retta orizzontale, come nelle strutture di volte in muratura, per esempio, quella di St Paul a Londra progettata da Robert Hooke.

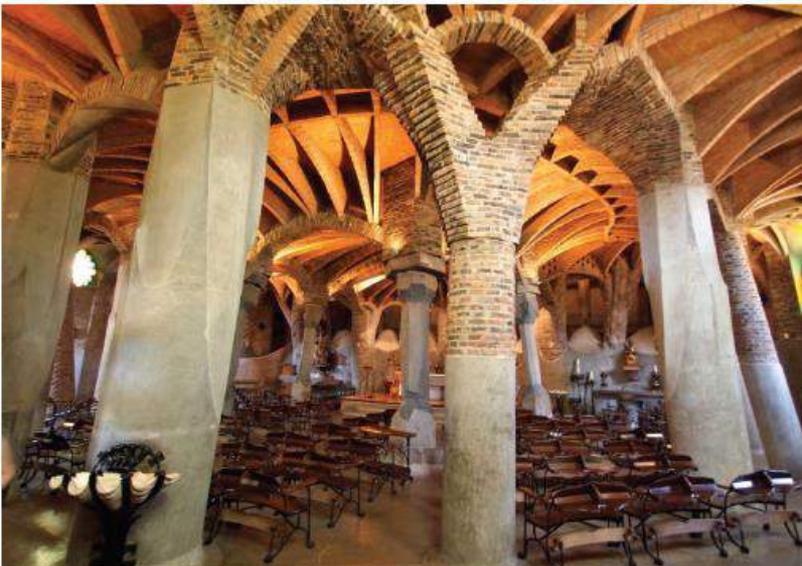


In seguito uno degli autori che maggiormente usò la catenaria per concepire le sue opere fu Antoni Gaudí

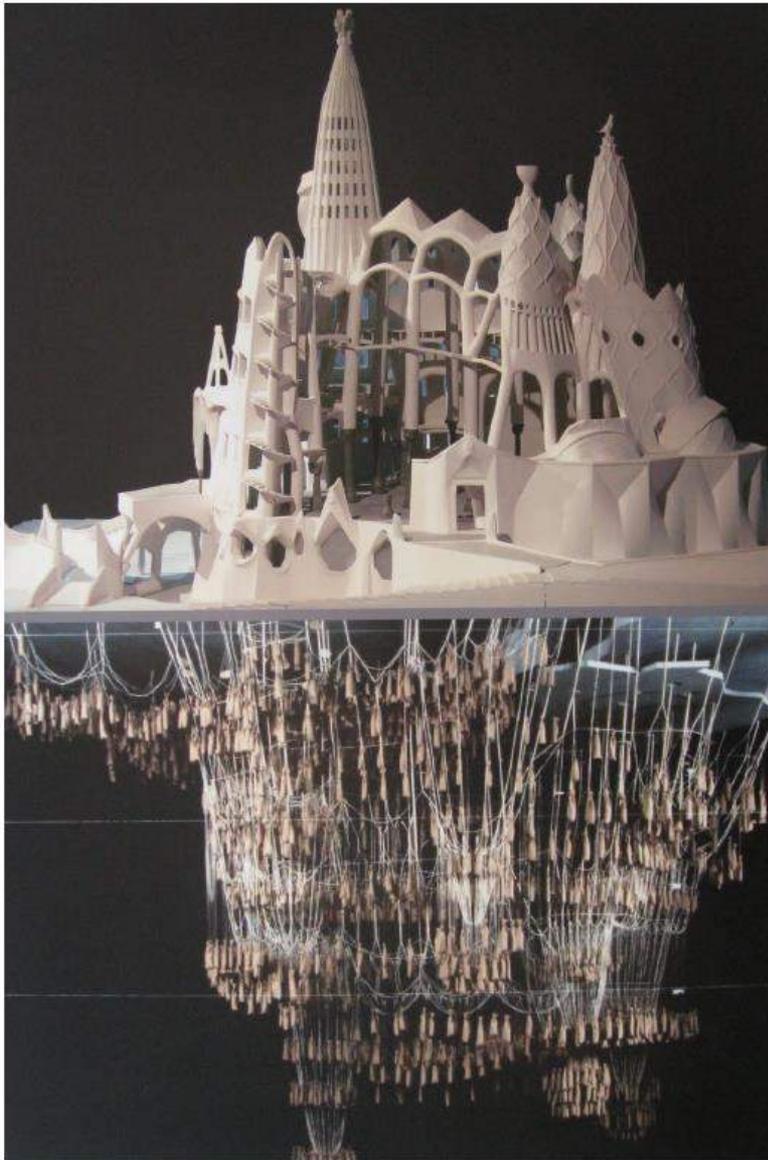


ARCO A CATENARIA

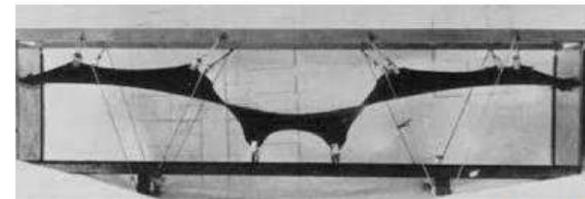
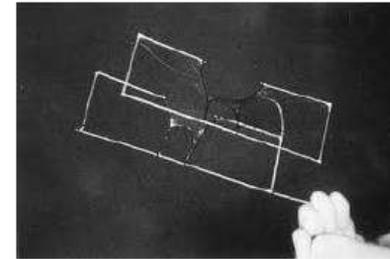




Modello di Gaudì per la cripta della cappella di Colònia Guell



Gaudi - Colonia Guell



Ponte Musmeci



Block - Armadillo

## Strutture resistenti per forma



*Ponte sul Basento, Potenza, Musmeci*



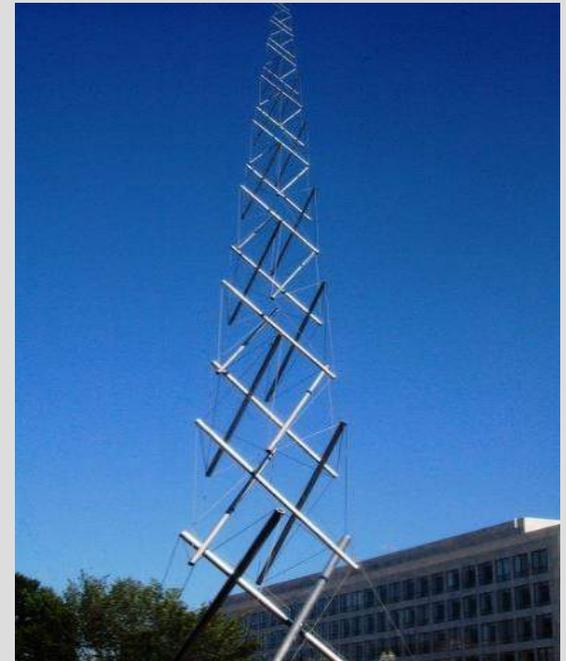
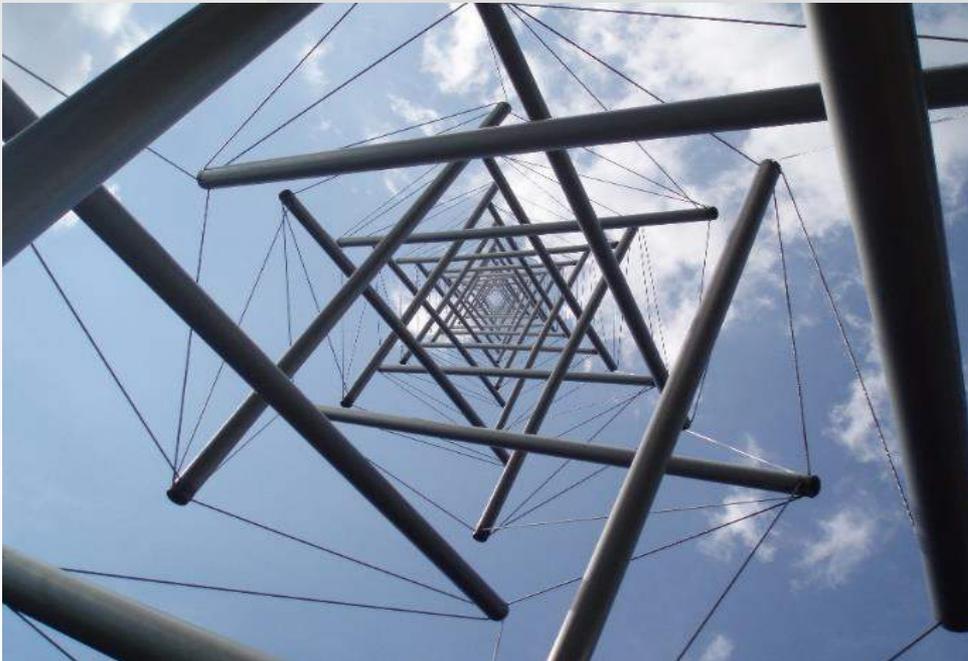
*Città delle Arti e della Scienza, Valencia, Calatrà*



*Olympiapark, Monaco*

## Le strutture tensegrali

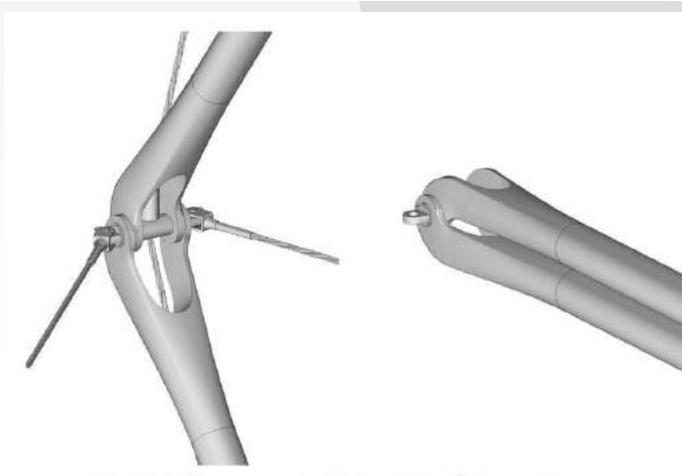
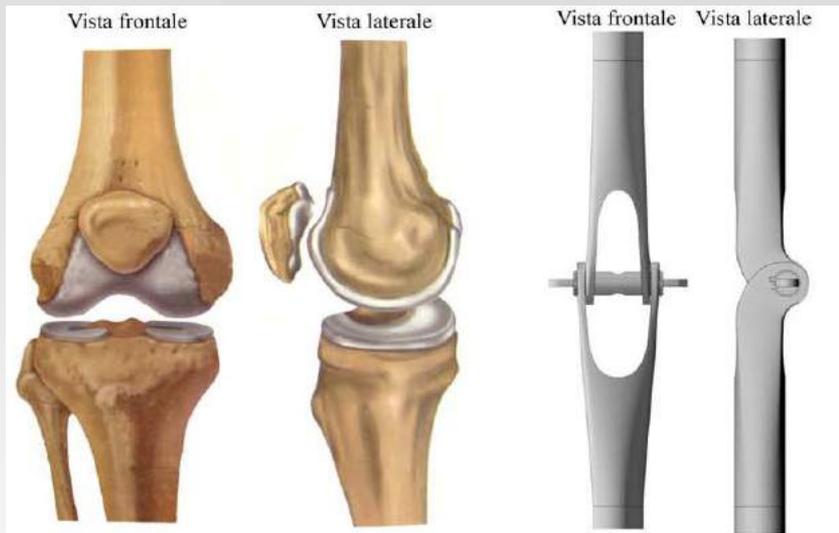
“Sistemi in uno stato di auto-equilibrio stabile, comprendenti una serie discontinua di componenti compressi all'interno di un continuum di componenti tesi”



Needle Tower, Snelson

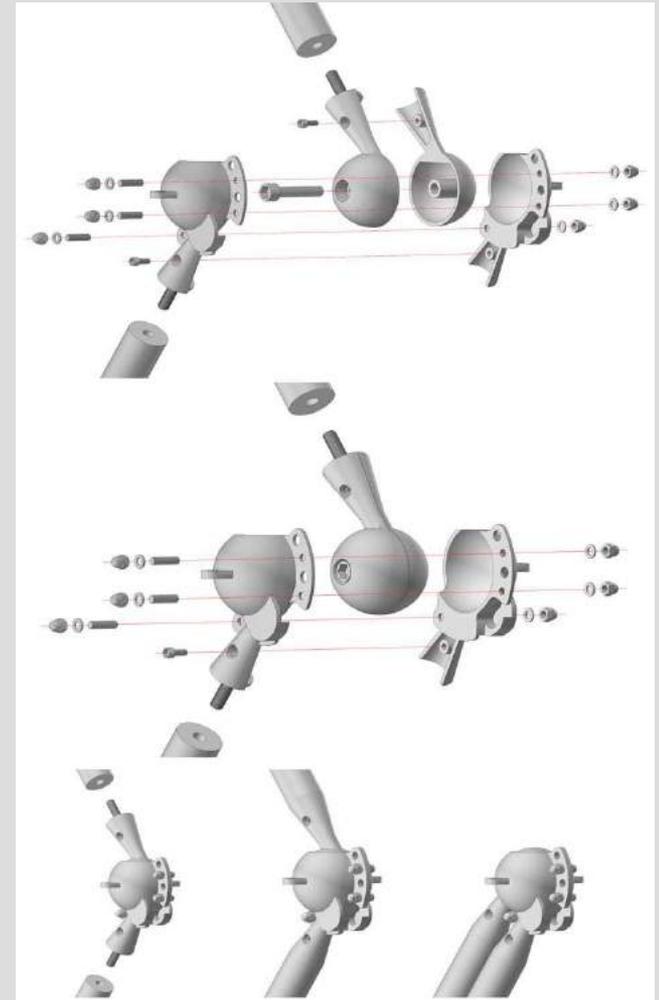
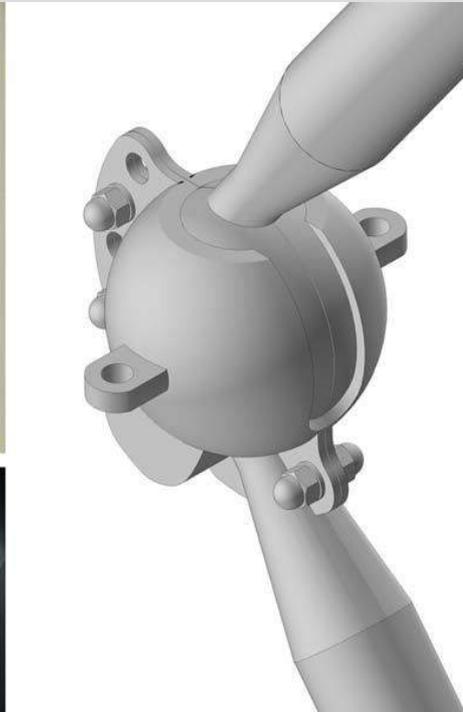
## Le strutture tensegrali

Particolari costruttivi: nodo a forcilla



## Le strutture tensegrali

Particolari costruttivi: nodo sferico

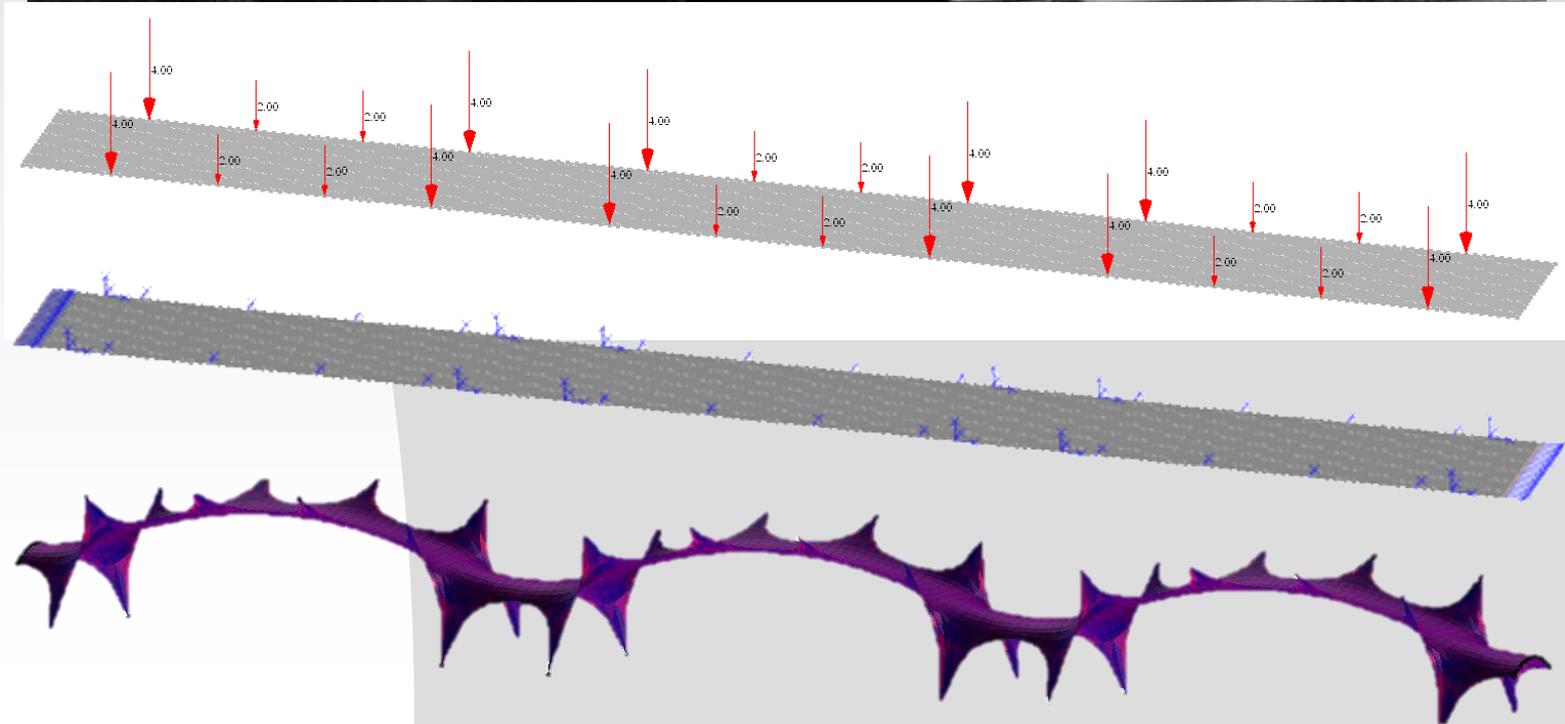


# Il metodo della Densità di Forza

"Tale metodo si basa sulla definizione, per ciascuna asta, del rapporto tra lo sforzo normale e la sua lunghezza, detta appunto densità di forza. Benché questa sia una quantità inusuale da definire, essa rappresenta la componente geometrica della matrice di rigidezza tangente"

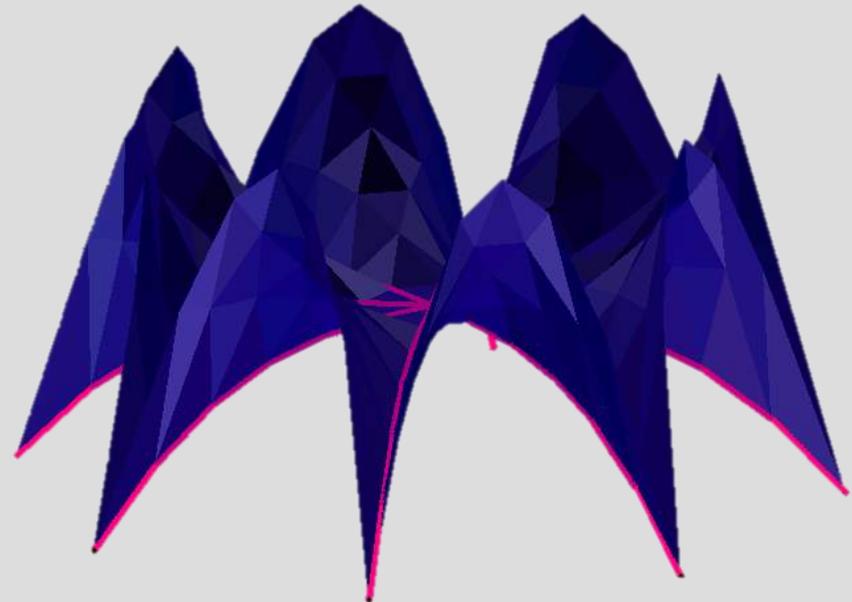
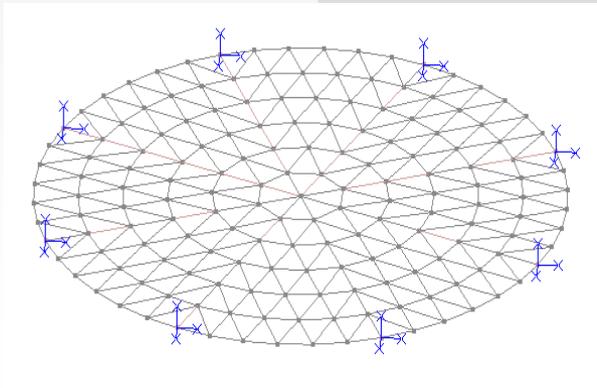
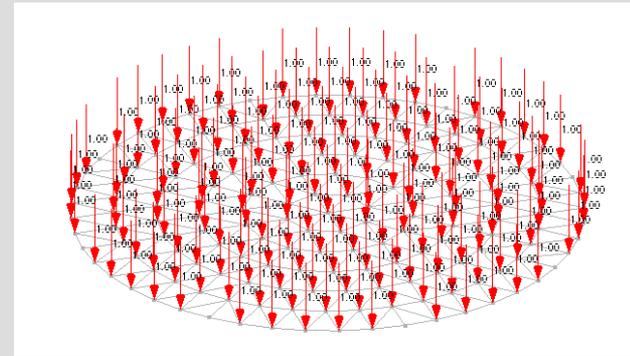
## Matlab: Codice di calcolo

Esempi: Ponte sul Basento



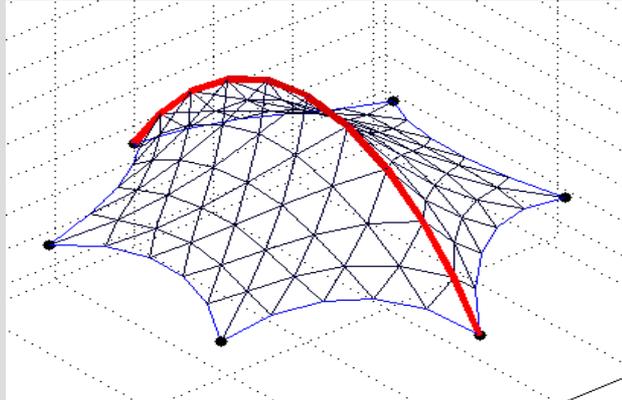
## Matlab: Codice di calcolo

Esempi: Oceanografico della Città delle Arti e della Scienza

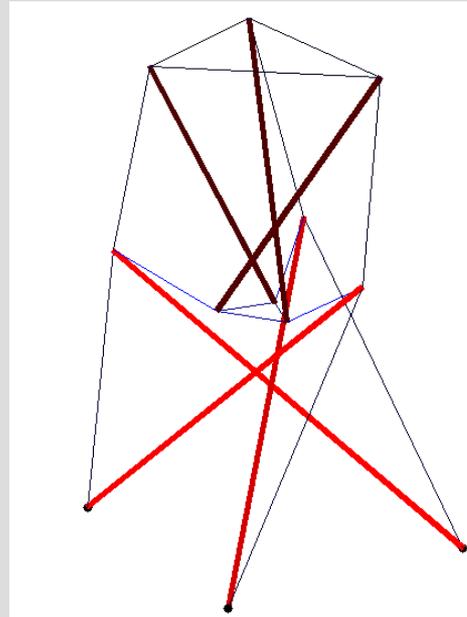


## Matlab: Codice di calcolo

Esempi: Arco



Esempi: Struttura tensegrale





Lincoln Cathedral



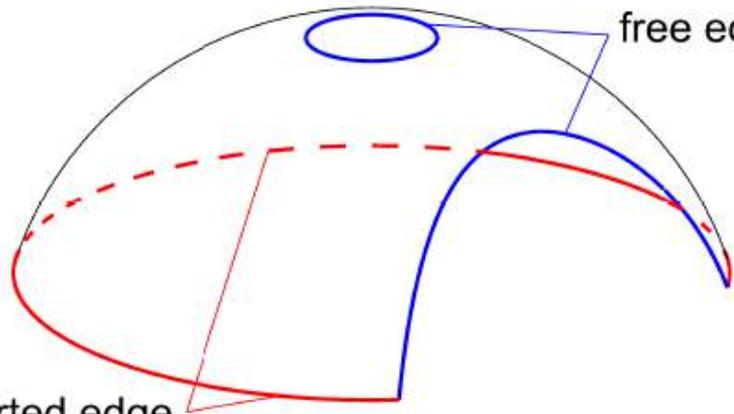
Wells Cathedral

## Thrust networks

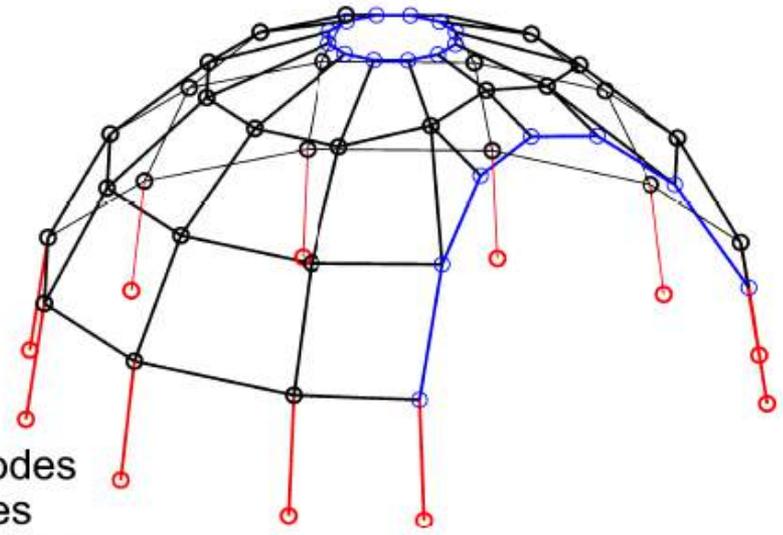
Vault

free edges

supported edge

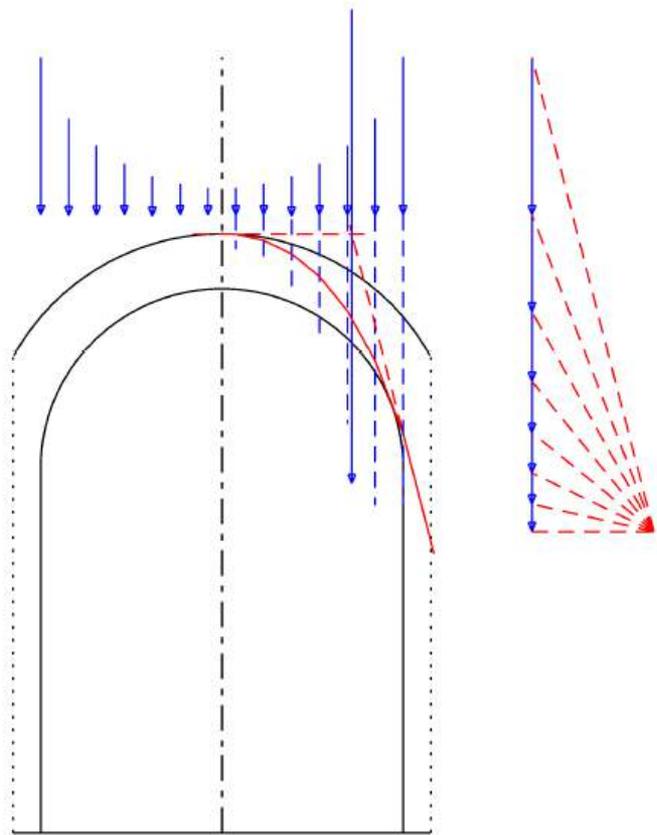


Thrust network

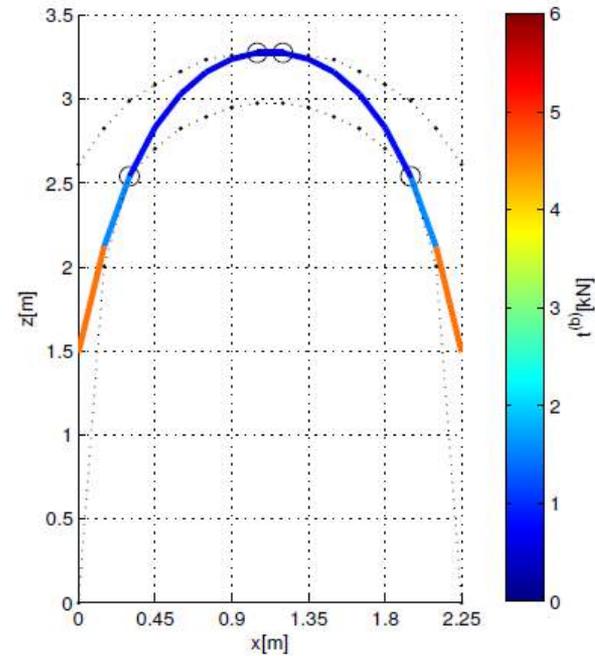
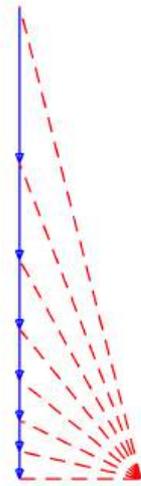
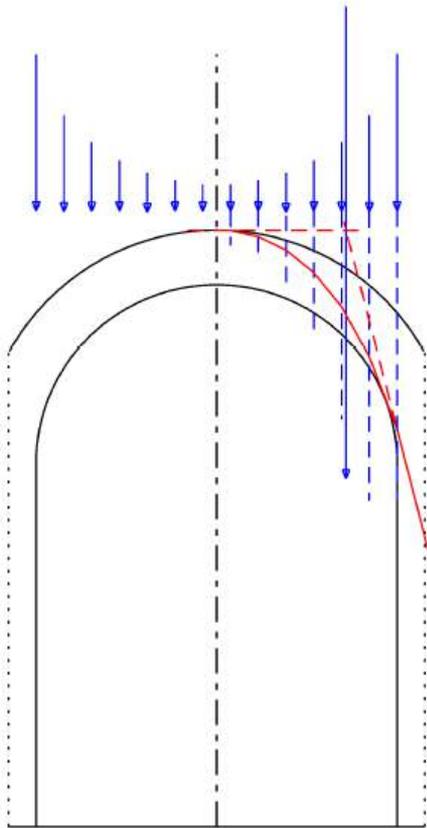


- internal branches and nodes
- edge branches and nodes
- external branches and nodes

## Analysis of a circular arch

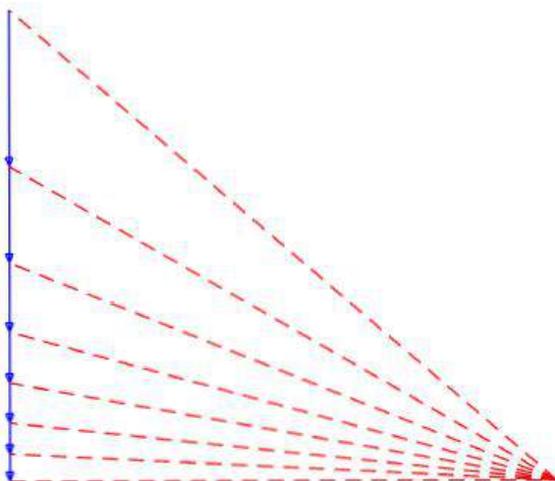
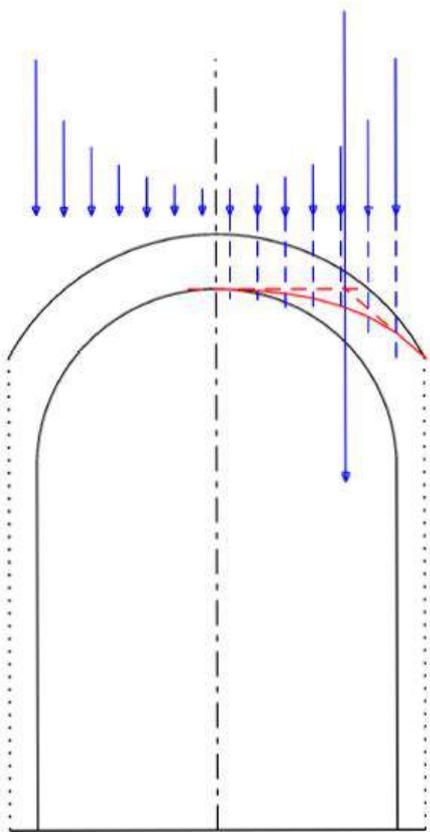


## Analysis of a circular arch

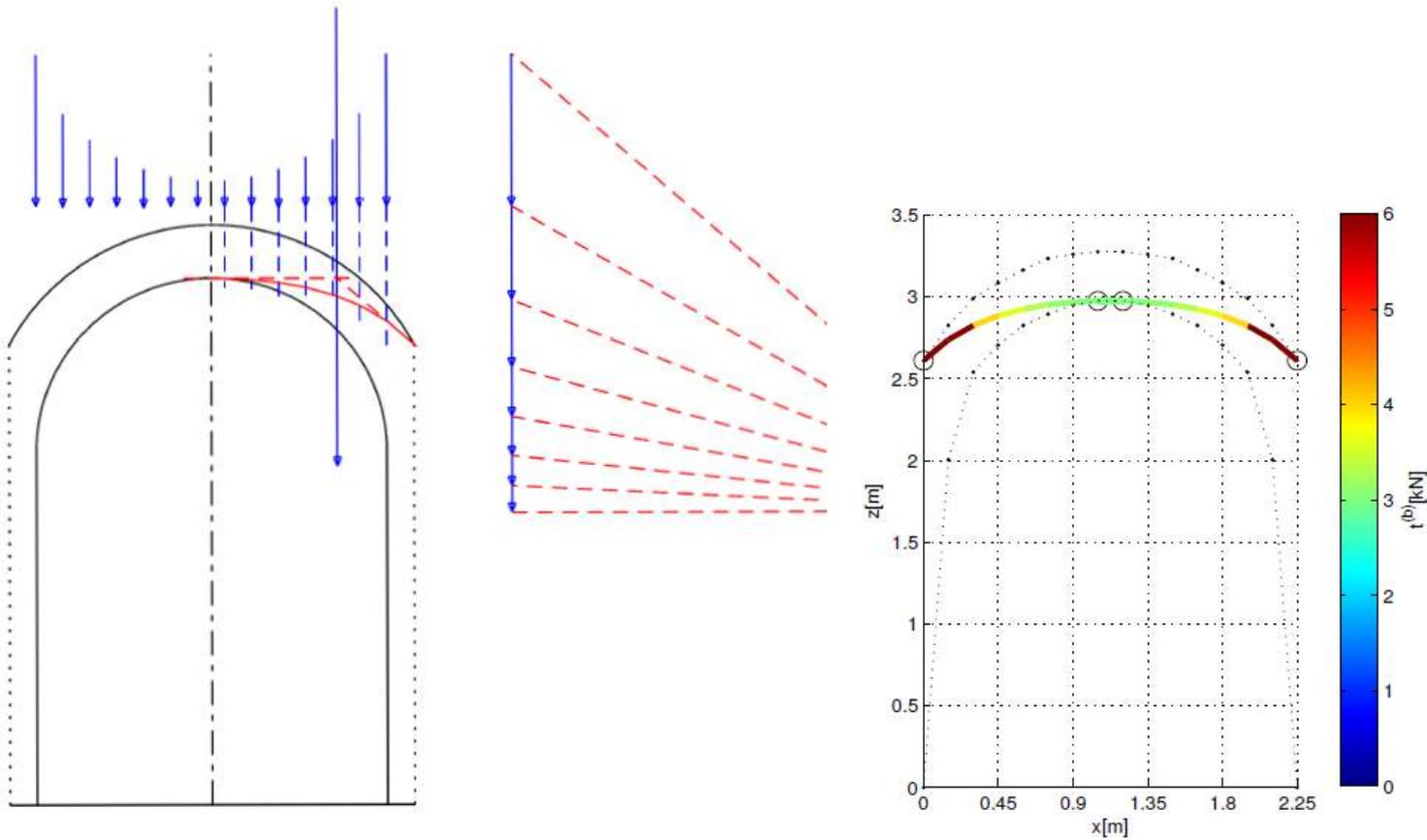


$$t^{(b)} = \sqrt{[t_h^{(b)}]^2 + [t_z^{(b)}]^2} = \frac{\hat{t}_h^{(b)}}{r} \frac{\ell^{(b)}}{\ell_h^{(b)}}$$

## Analysis of a circular arch



## Analysis of a circular arch



$$t^{(b)} = \sqrt{[t_h^{(b)}]^2 + [t_z^{(b)}]^2} = \frac{\hat{t}_h^{(b)} \ell^{(b)}}{r \ell_h^{(b)}}$$

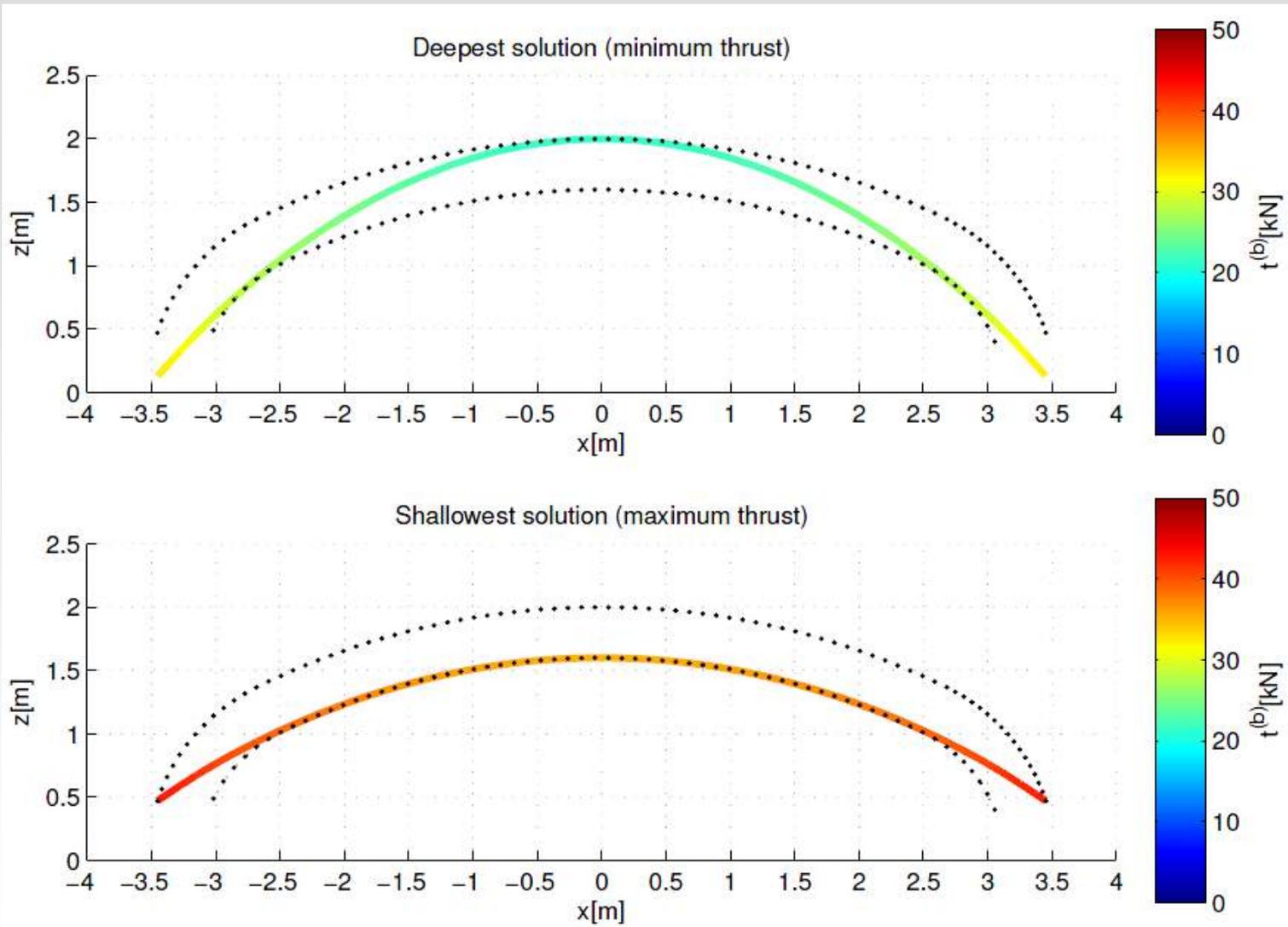


Fig. 3 – Three-centred arch: deepest and shallowest network configurations for the arch of thickness  $t = 0.4m$  subjected to self weight

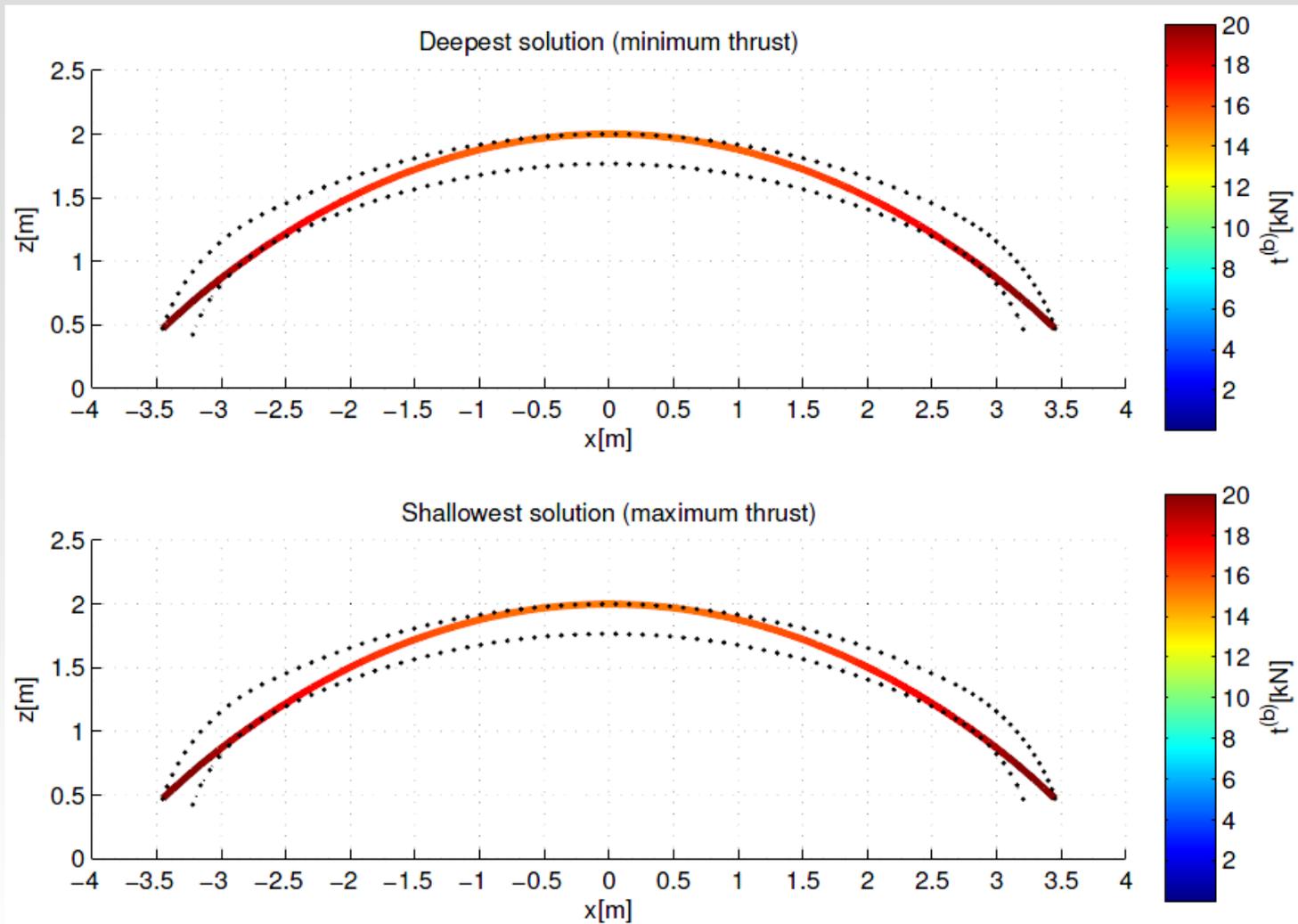
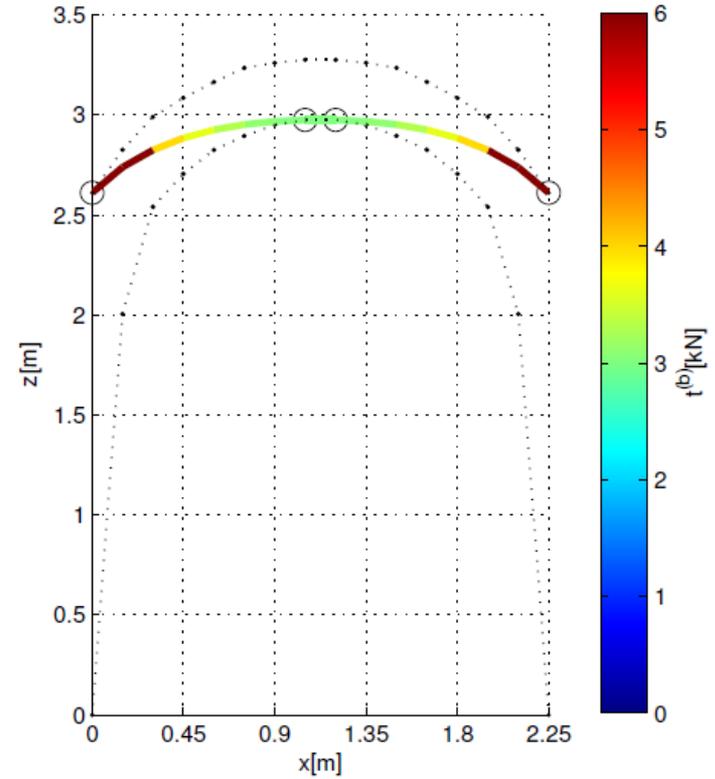
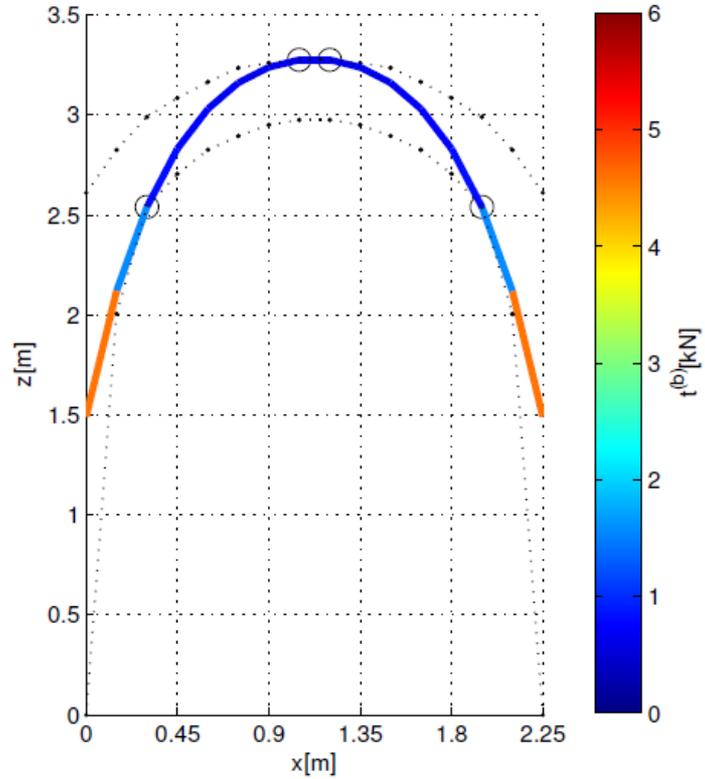


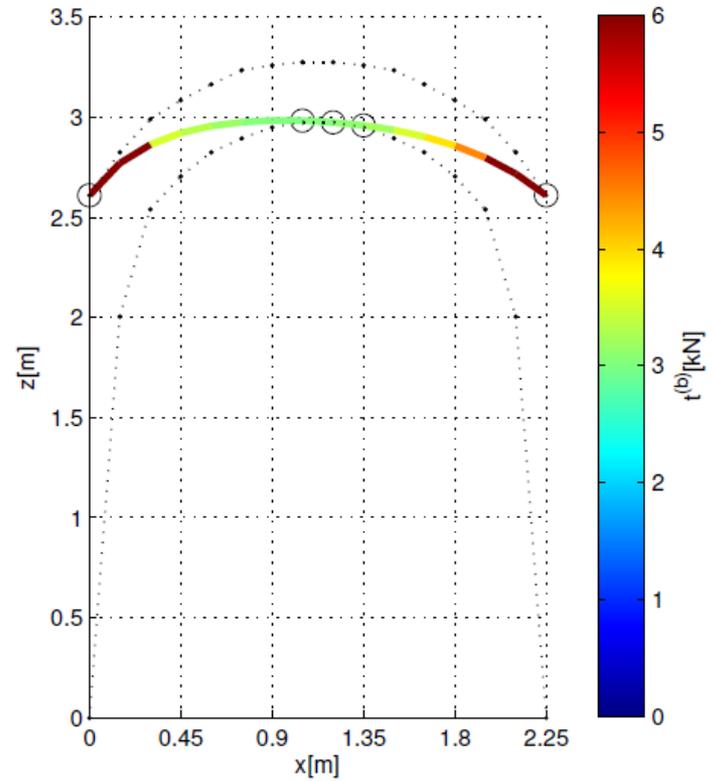
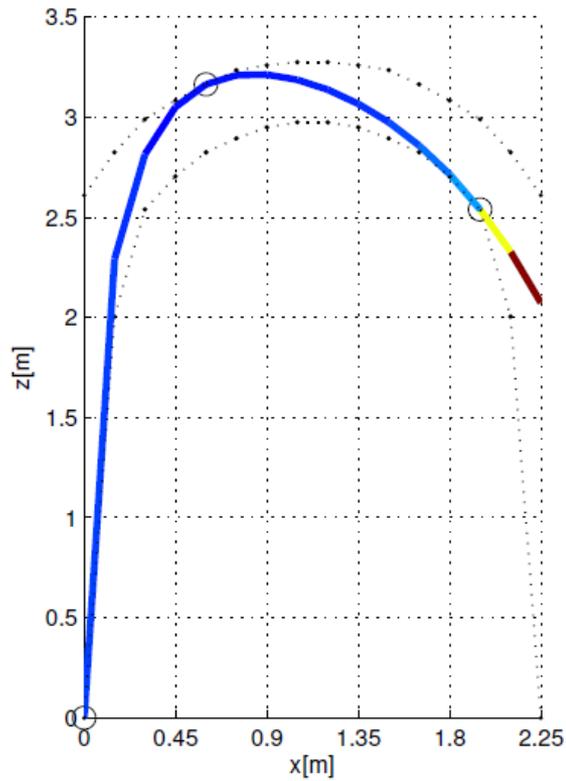
Fig. 4 – Three-centred arch: coincidence of the deepest and shallowest network configurations for the arch subjected to self weight emphasizes that the minimum thickness ( $t = 0.234m$ ) has been attained

## Analysis of a circular arch



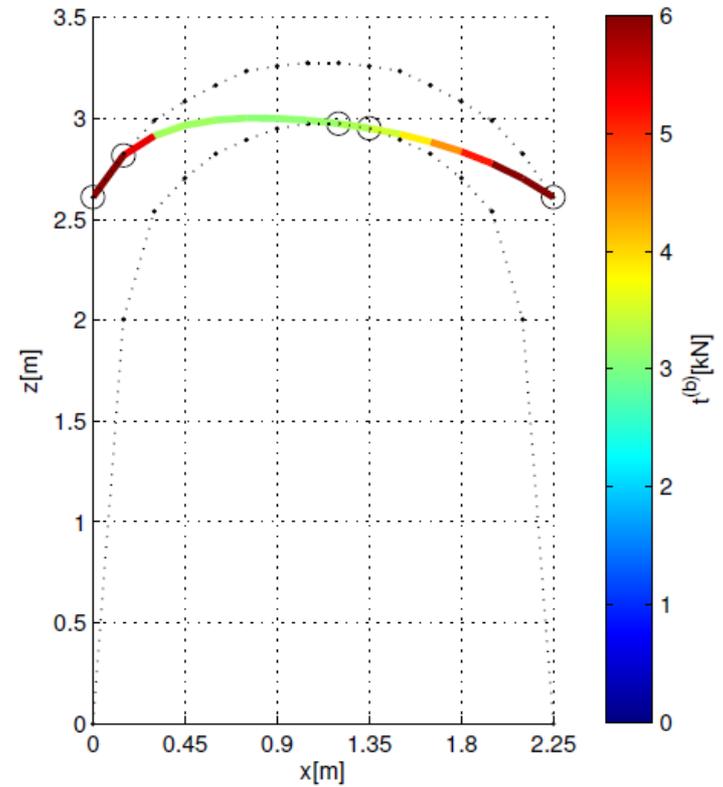
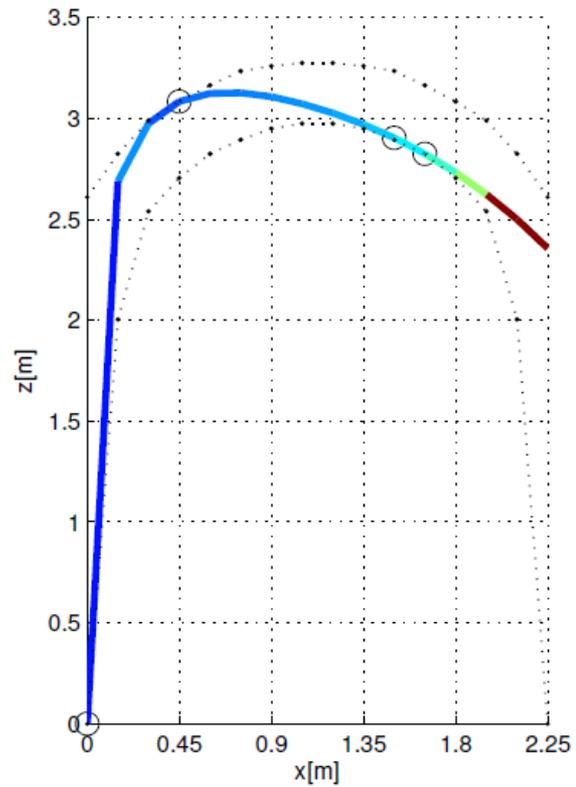
$$f_x = 0 \quad f_z$$

## Analysis of a circular arch



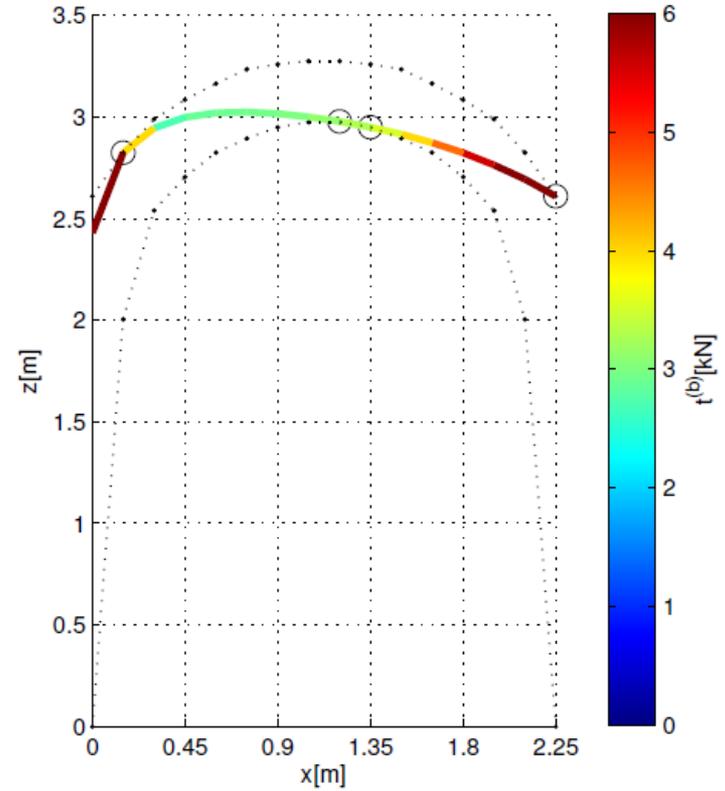
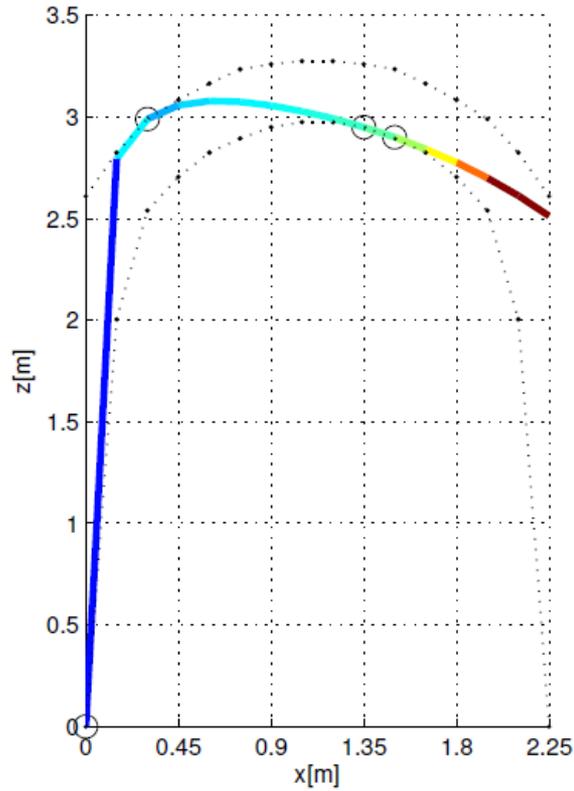
$$f_x = 0.3 f_z$$

## Analysis of a circular arch



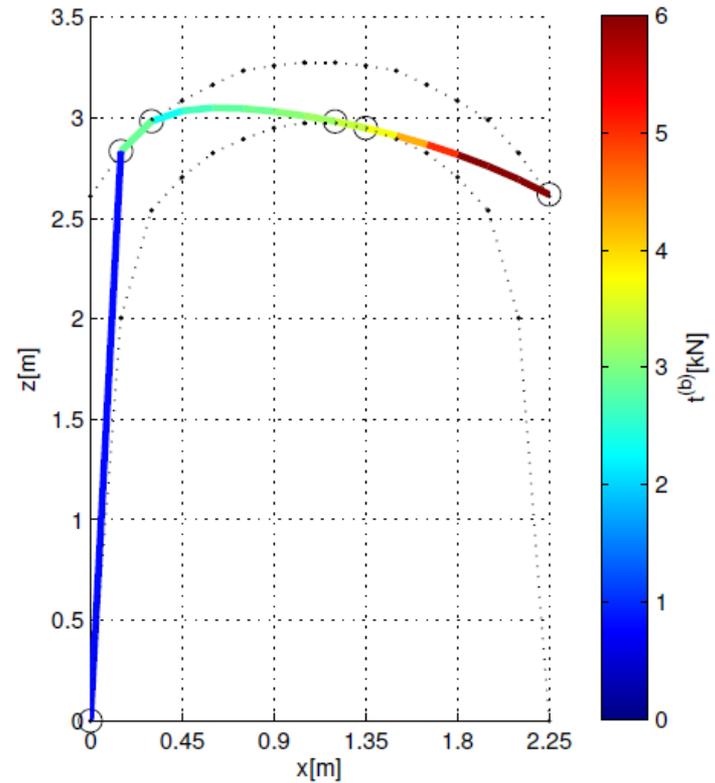
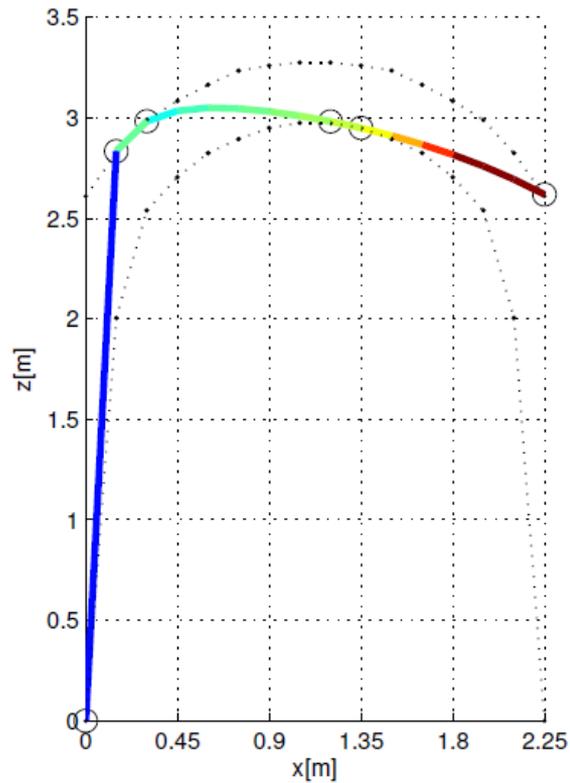
$$f_x = 0.6 f_z$$

## Analysis of a circular arch



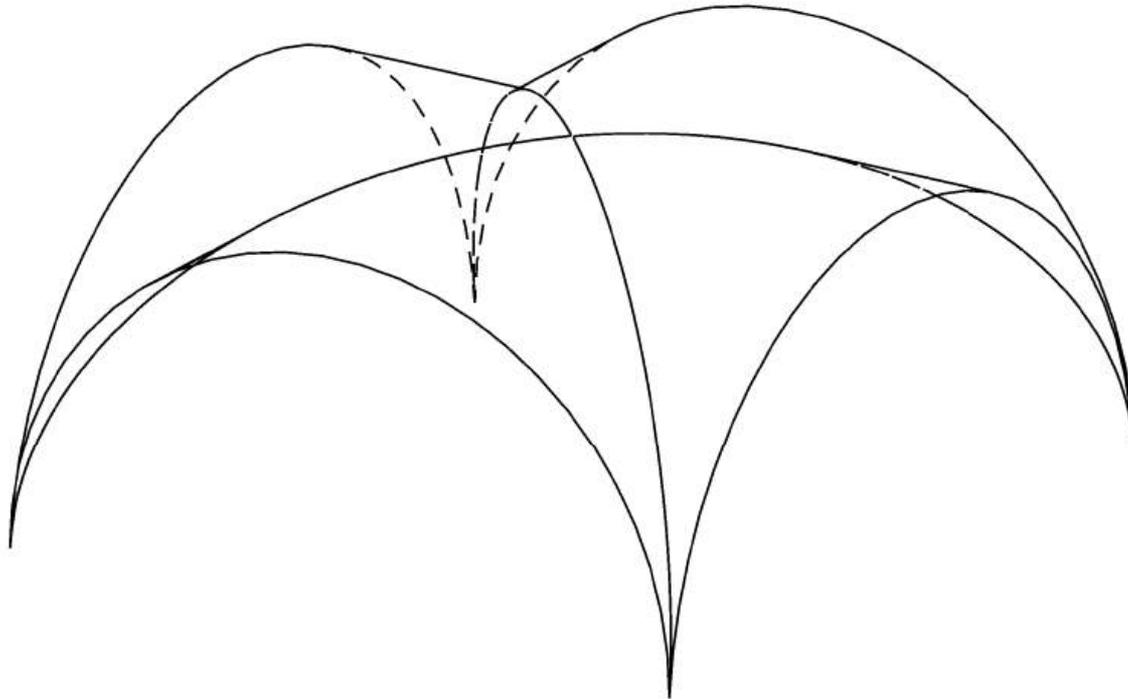
$$f_x = 0.9 f_z$$

## Analysis of a circular arch

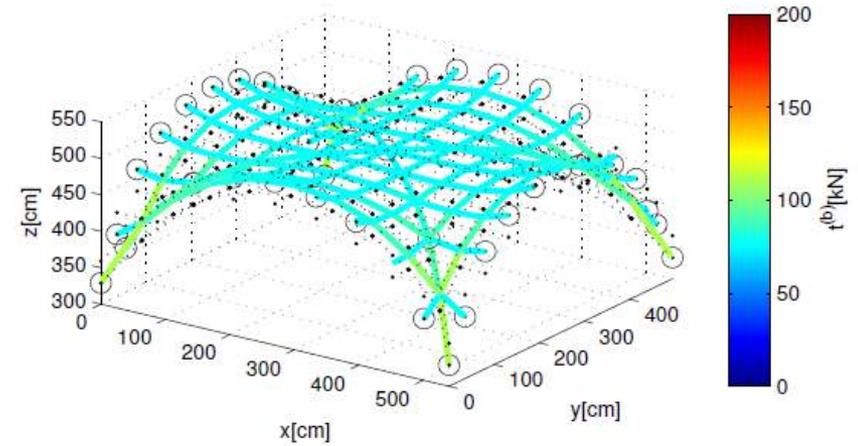
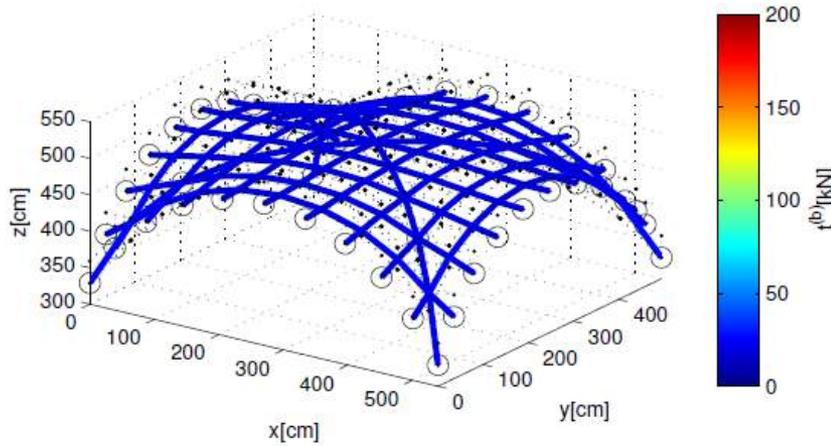


$$f_x = 1.2 f_z$$

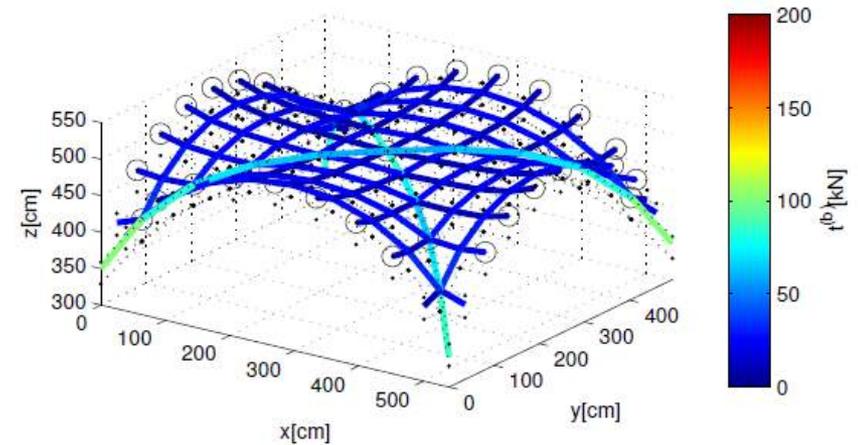
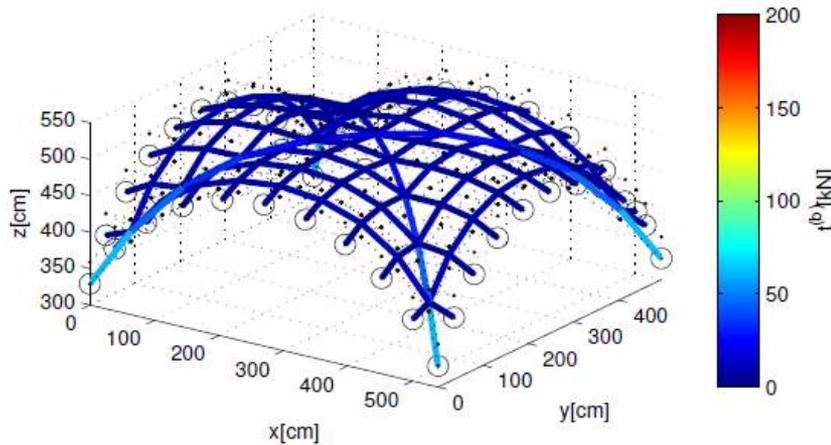
## Analysis of a groin vault



## Analysis of a groin vault

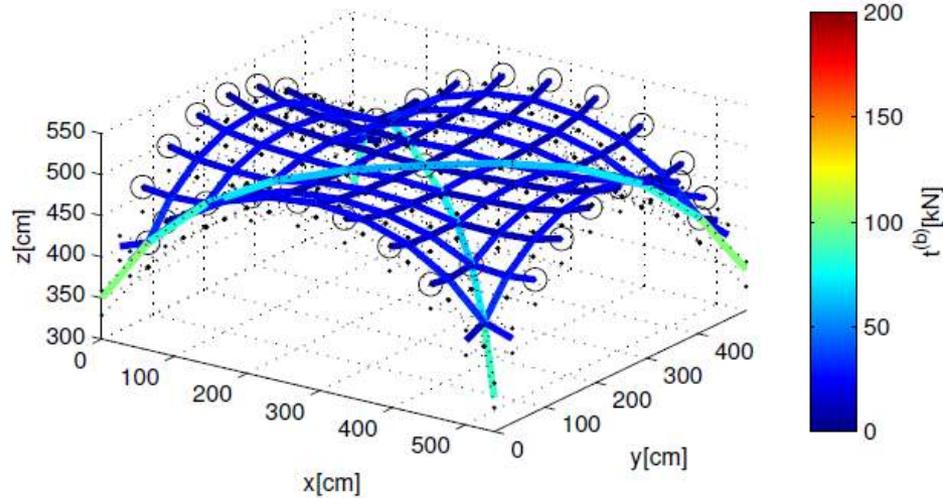
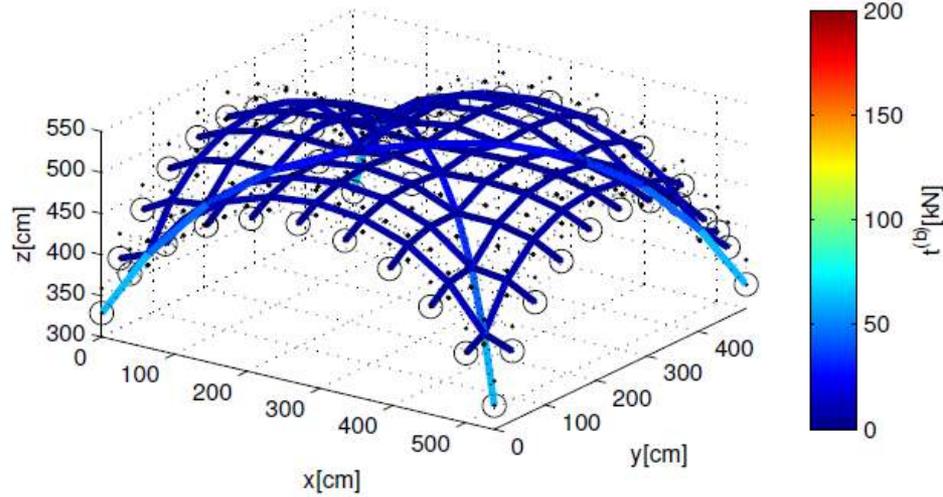


$\hat{t}_{h,\min} = 0.1 \text{ kN}$  in all branches



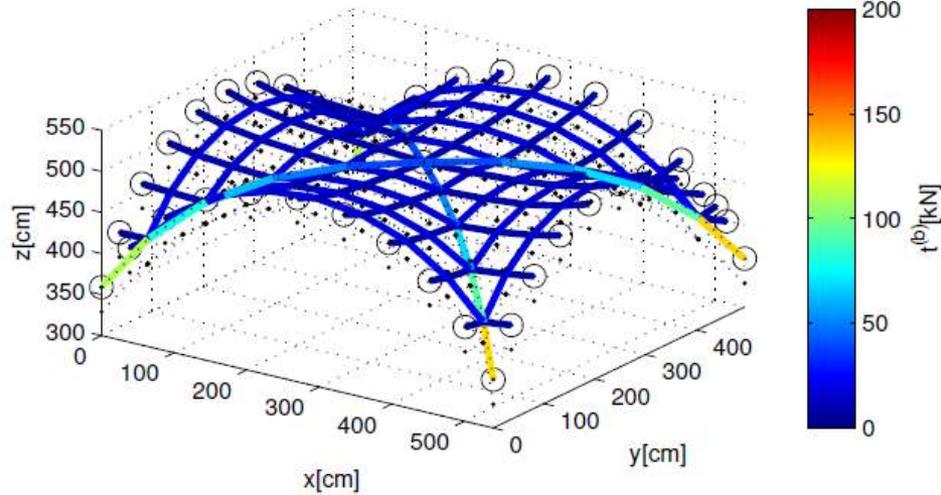
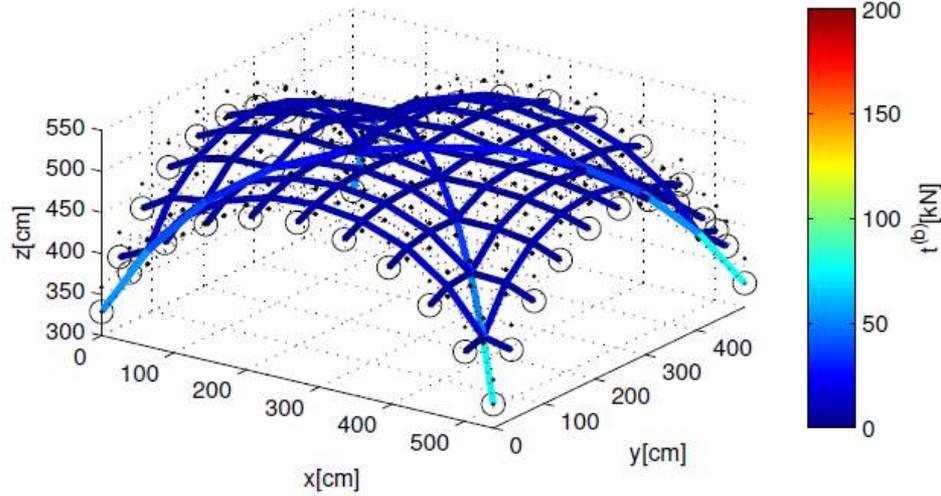
$\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.5 \text{ kN}$  in groins     $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.2 \text{ kN}$  in barrel arches     $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.1 \text{ kN}$  in longitudinal branches

## Analysis of a groin vault



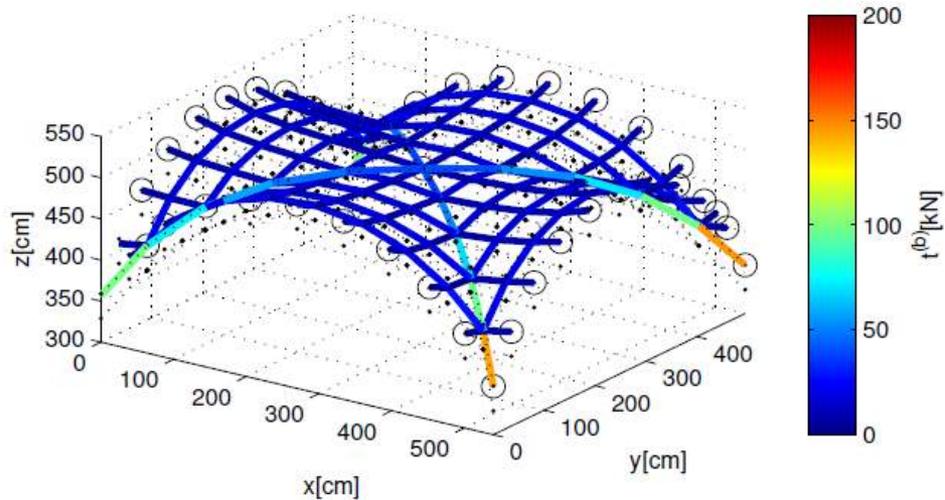
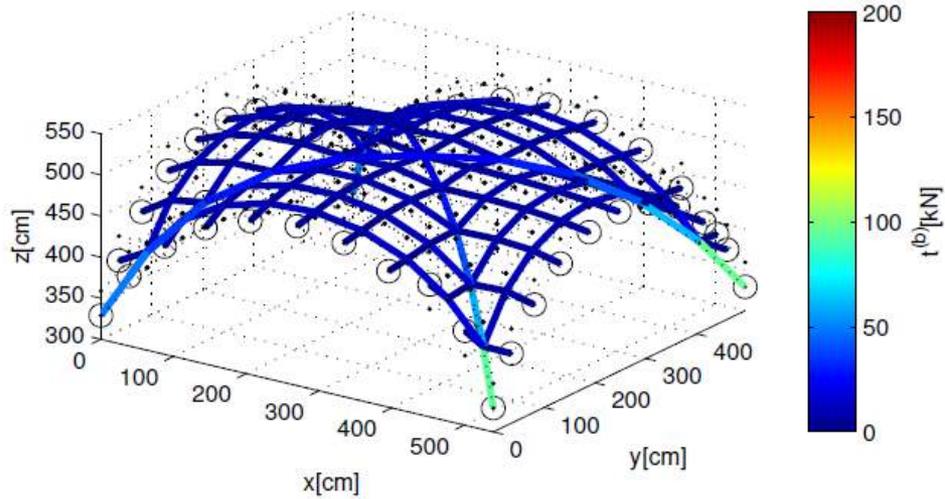
$$f_x = 0 \quad f_z, \quad f_y = 0 \quad f_z$$

## Analysis of a groin vault



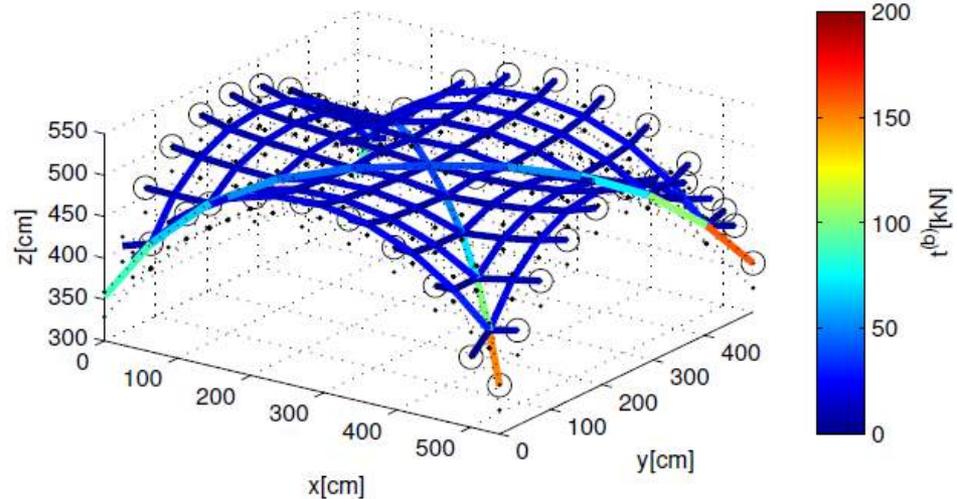
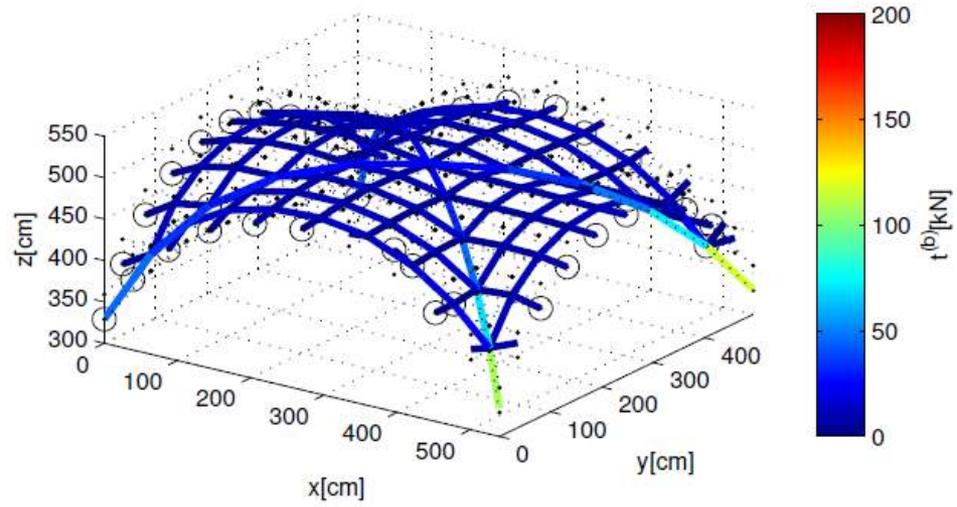
$$f_x = 0.1 f_z, \quad f_y = 0.05 f_z$$

## Analysis of a groin vault



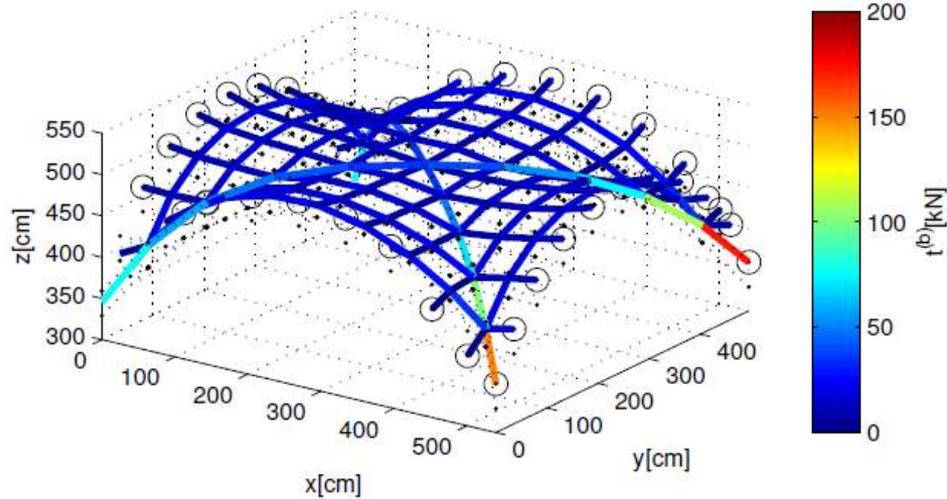
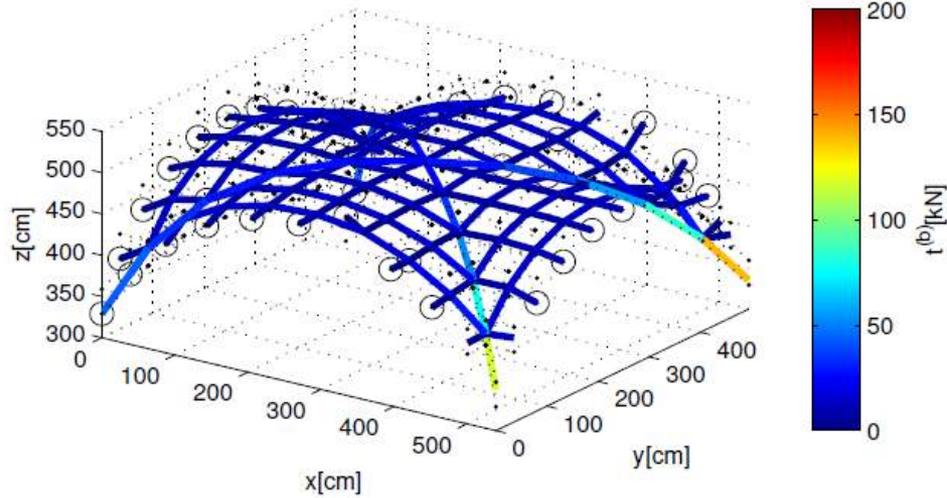
$$f_x = 0.2 f_z, \quad f_y = 0.1 f_z$$

## Analysis of a groin vault



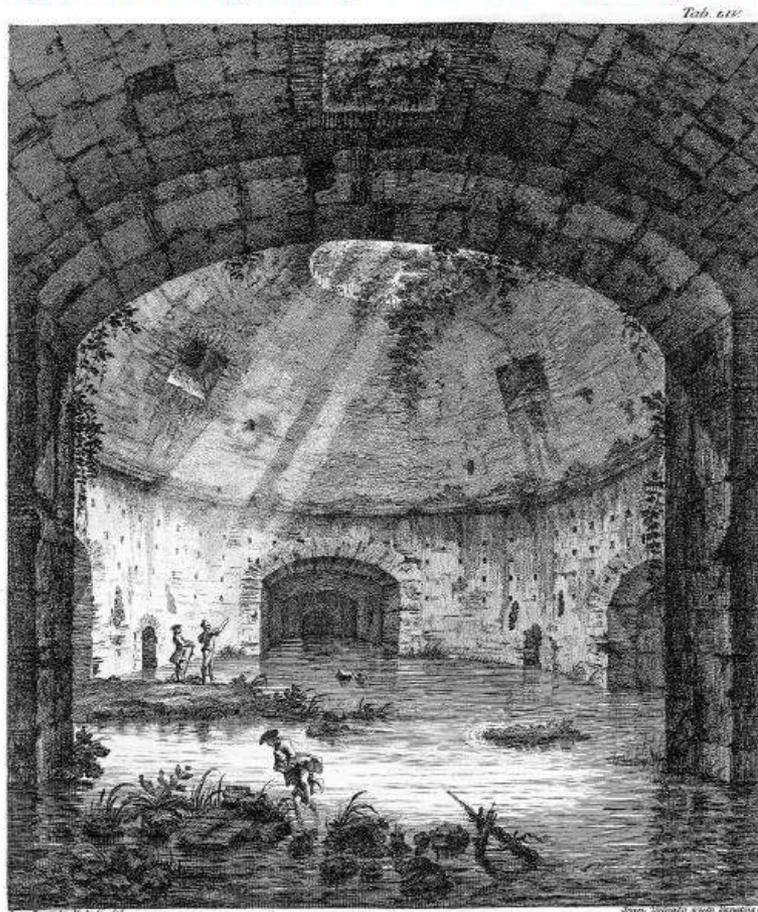
$$f_x = 0.3 f_z, \quad f_y = 0.15 f_z$$

## Analysis of a groin vault



$$f_x = 0.4 f_z, \quad f_y = 0.2 f_z$$

## Frigidarium (Tempio di Mercurio) in Baia Archeological Park

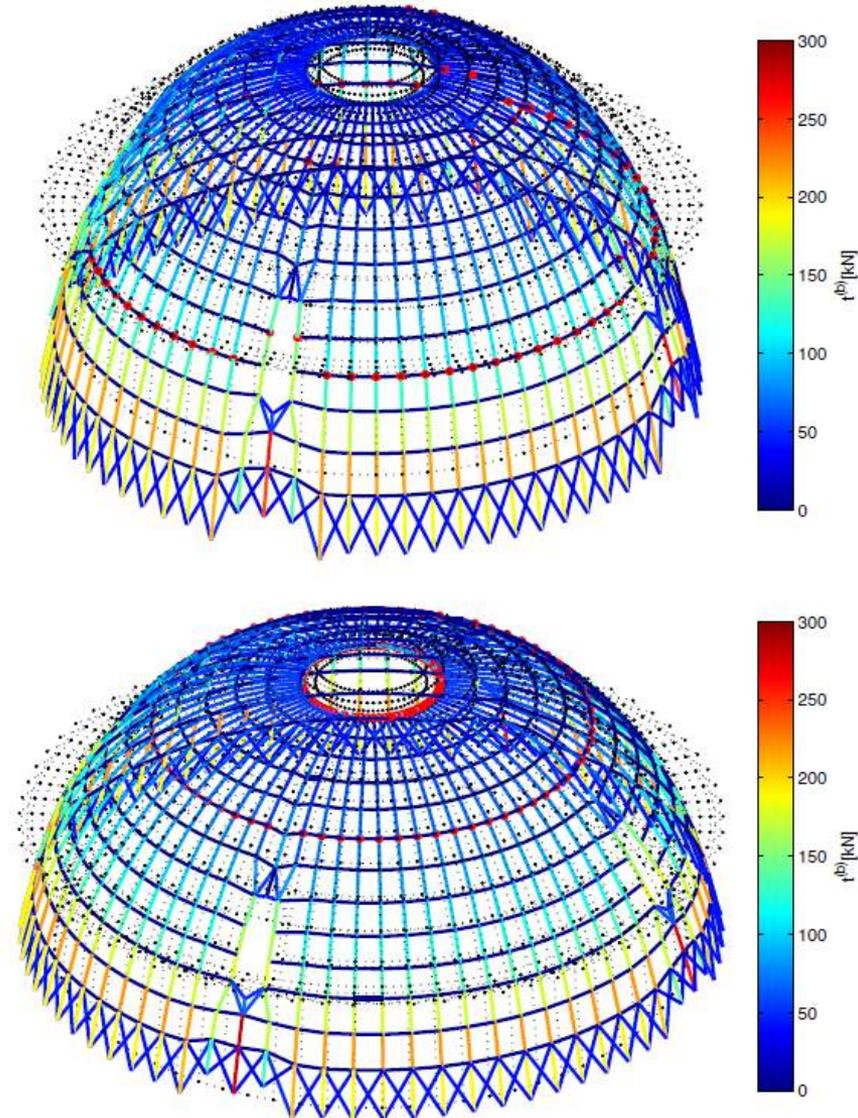


*Fabbrica rotonda a Baia La dicono le Terme* | *Edificium seu Pantheon Baiæ Thermae alii*  
*Atti il Tempio di Mercurio ora il Truglio* | *Atti Mercurii Templum dicunt nunc Truglio*

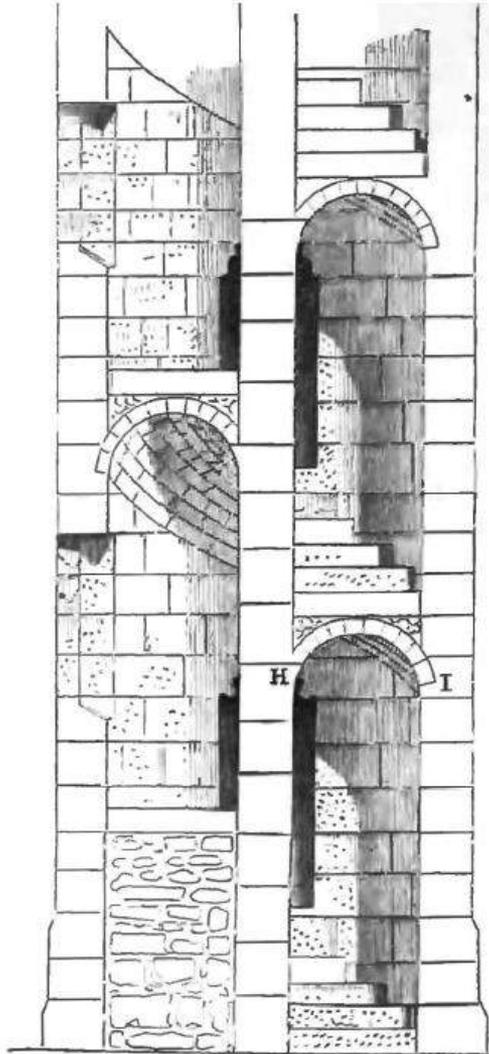


Paoli, Avanzi della Antichità esistenti a Pozzuoli, Cuma, e Baja, 1768.

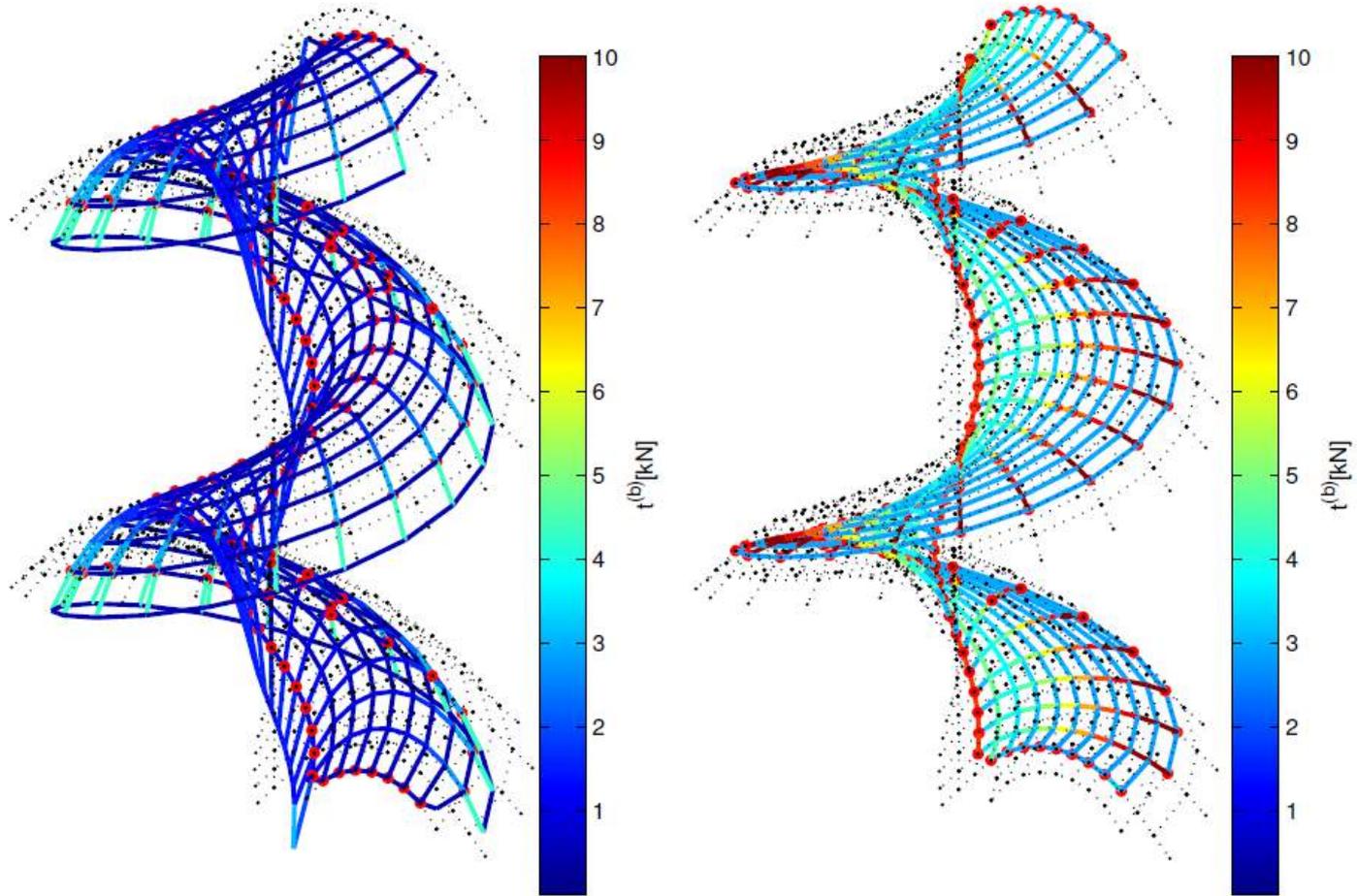
## Frigidarium (Tempio di Mercurio) in Baia Archeological Park



## Vaulted helycoidal staircase in Abbey of Saint Gilles du Gard



## Vaulted helycoidal staircase in Abbey of Saint Gilles du Gard



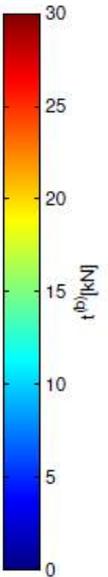
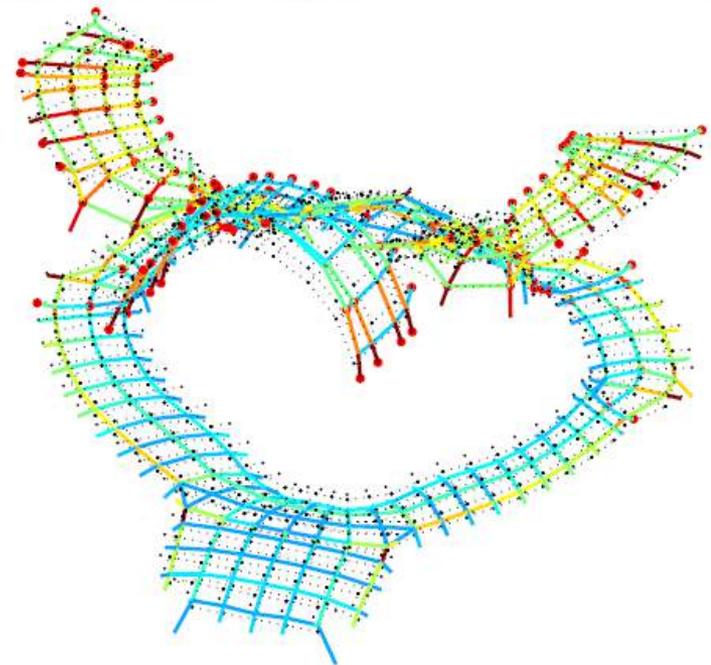
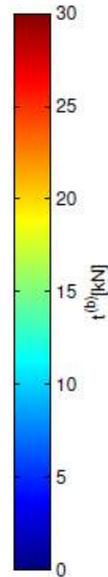
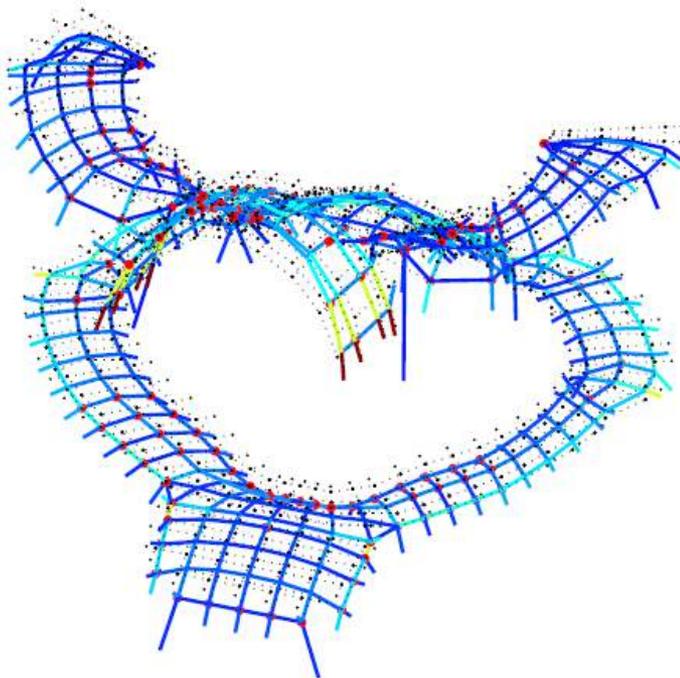
## Double helicoidal staircase of Palazzo Sanfelice in Napoli



Ferdinà lievât'a'sott



## Double helicoidal staircase of Palazzo Sanfelice in Napoli



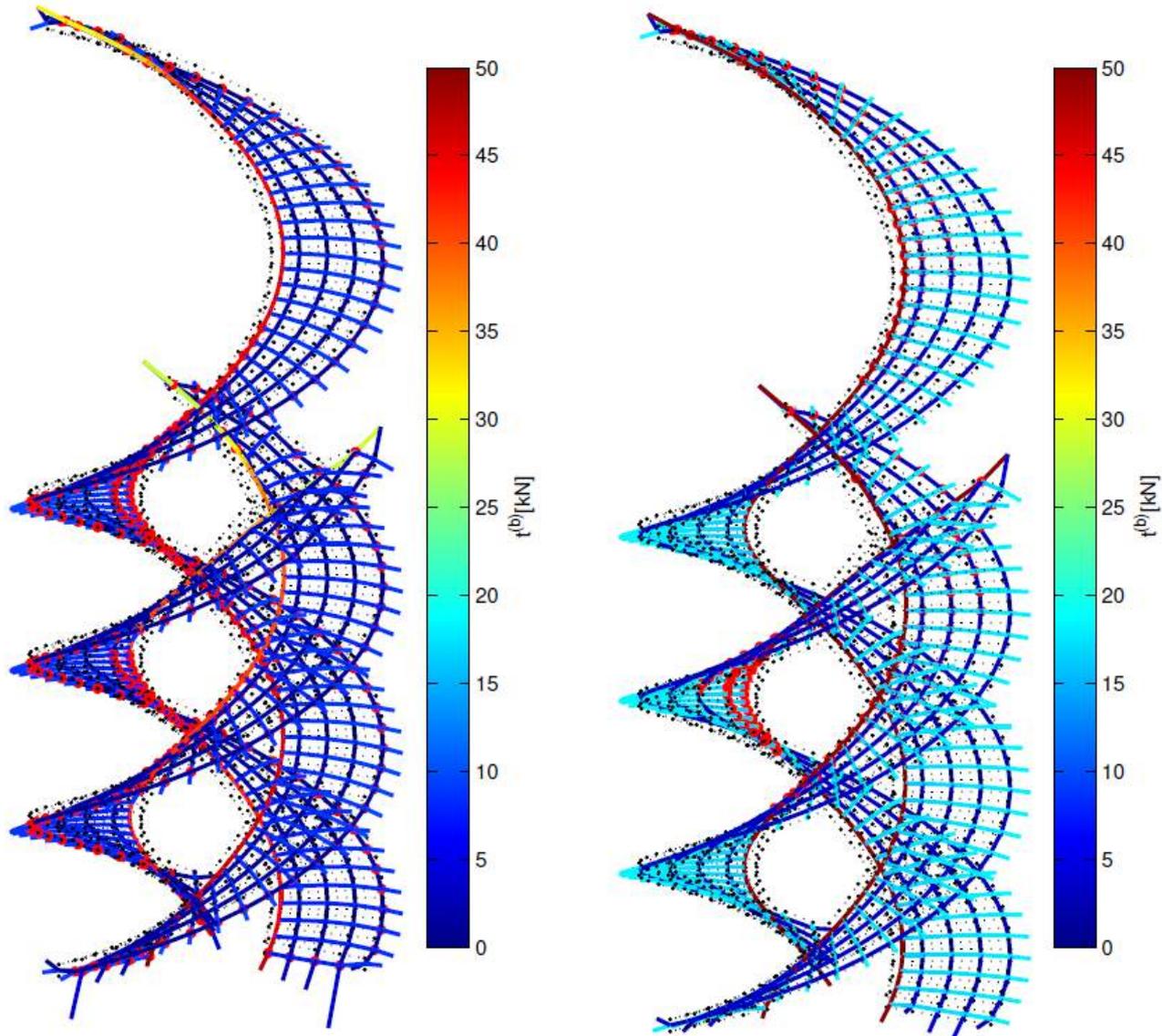
## The triple helical staircase in San Domingos de Bonaval



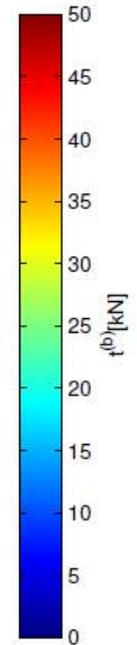
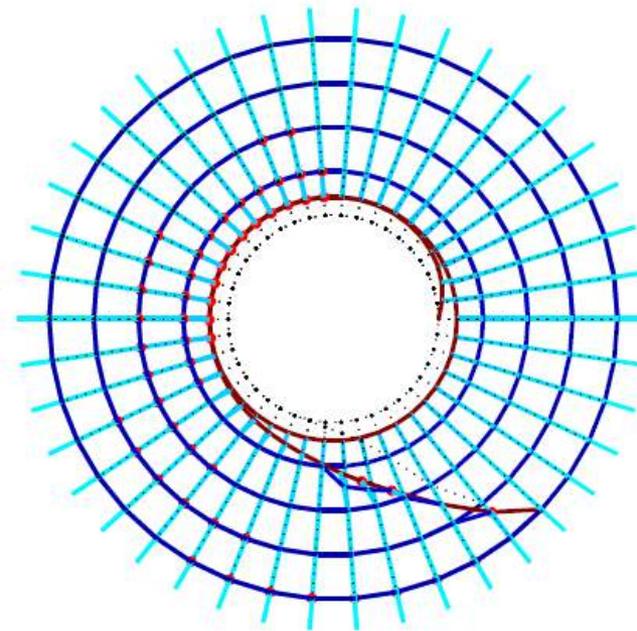
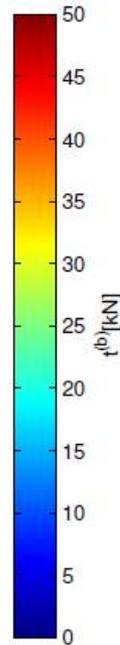
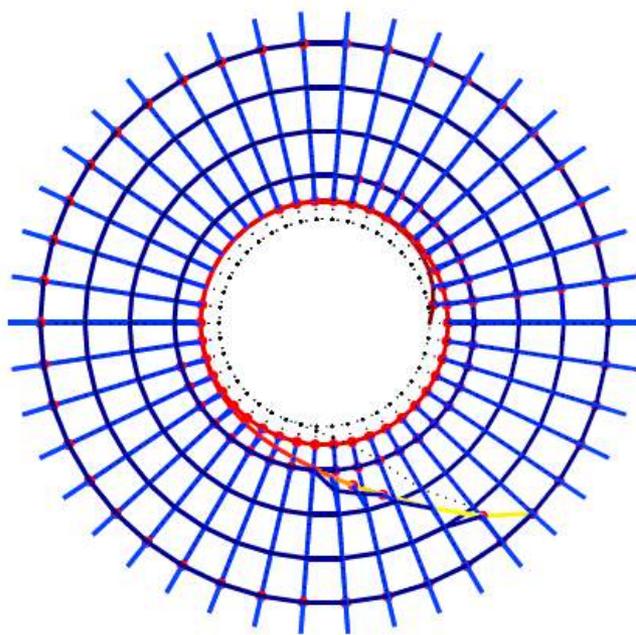
Angelillo, The Equilibrium of Helical Stairs Made of Monolithic Steps, *Int. J. of Architectural Heritage*, 2016

De Serio, Masonry structures modelled as assemblies of rigid blocks, PhD Thesis, UniNa, 2017

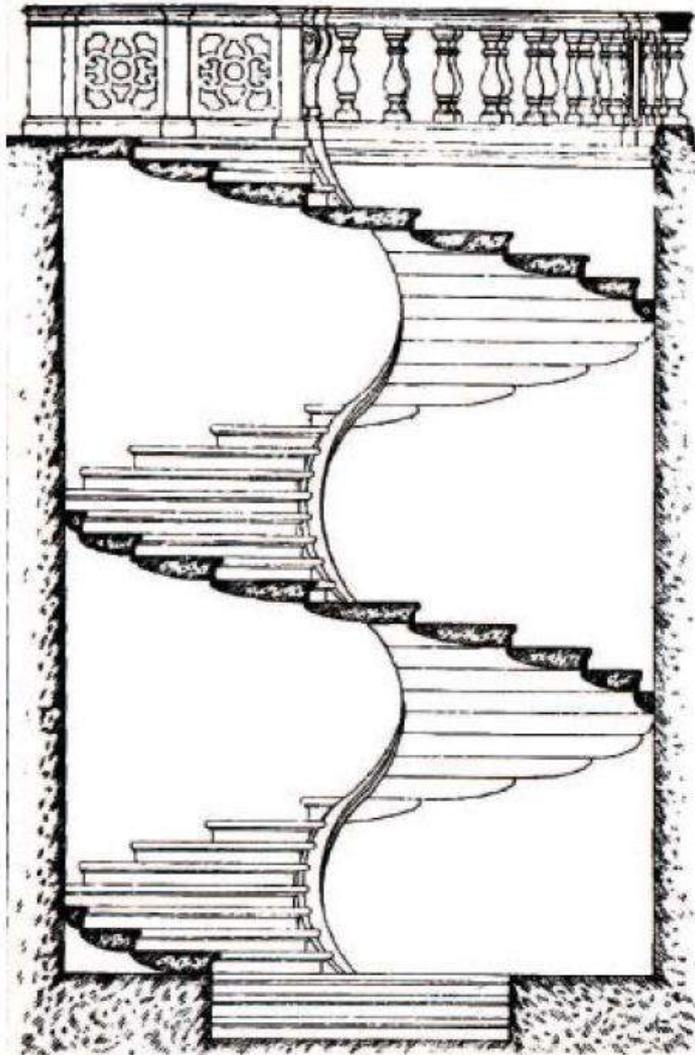
## The triple helical staircase in San Domingos de Bonaval



## The triple helical staircase in San Domingos de Bonaval



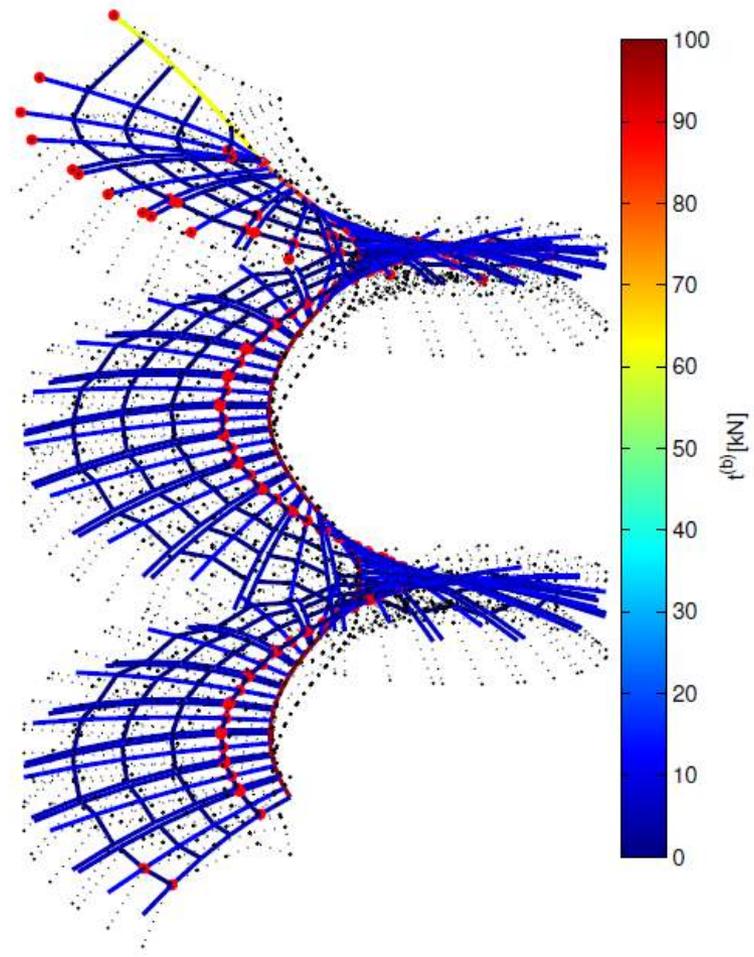
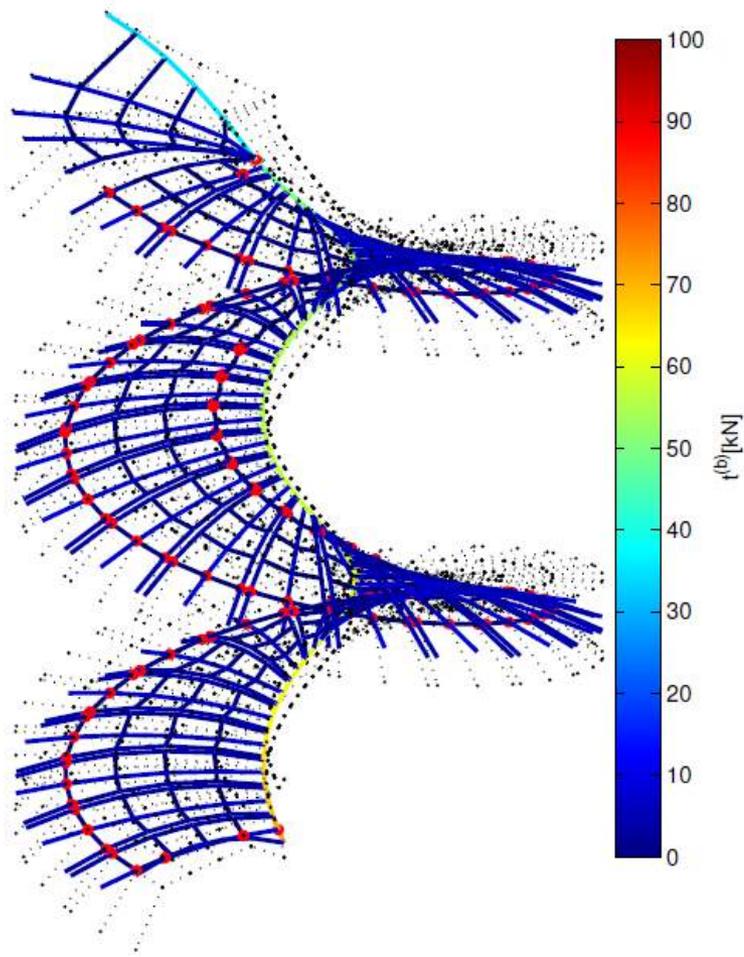
## Helicoidal stair leading to the Library of the Padula Charterhouse



Sacco, La Certosa di Padula disegnata, descritta e narrata su documenti inediti, 1916

Marmo & Rosati, Reformulation and extension of the thrust network analysis, Computers and Structures, 2017

## Helicoidal stair leading to the Library of the Padula Charterhouse



## Double helicoidal staircase (Doppelwendeltreppe) in Graz Castle



Stairs of reconciliation



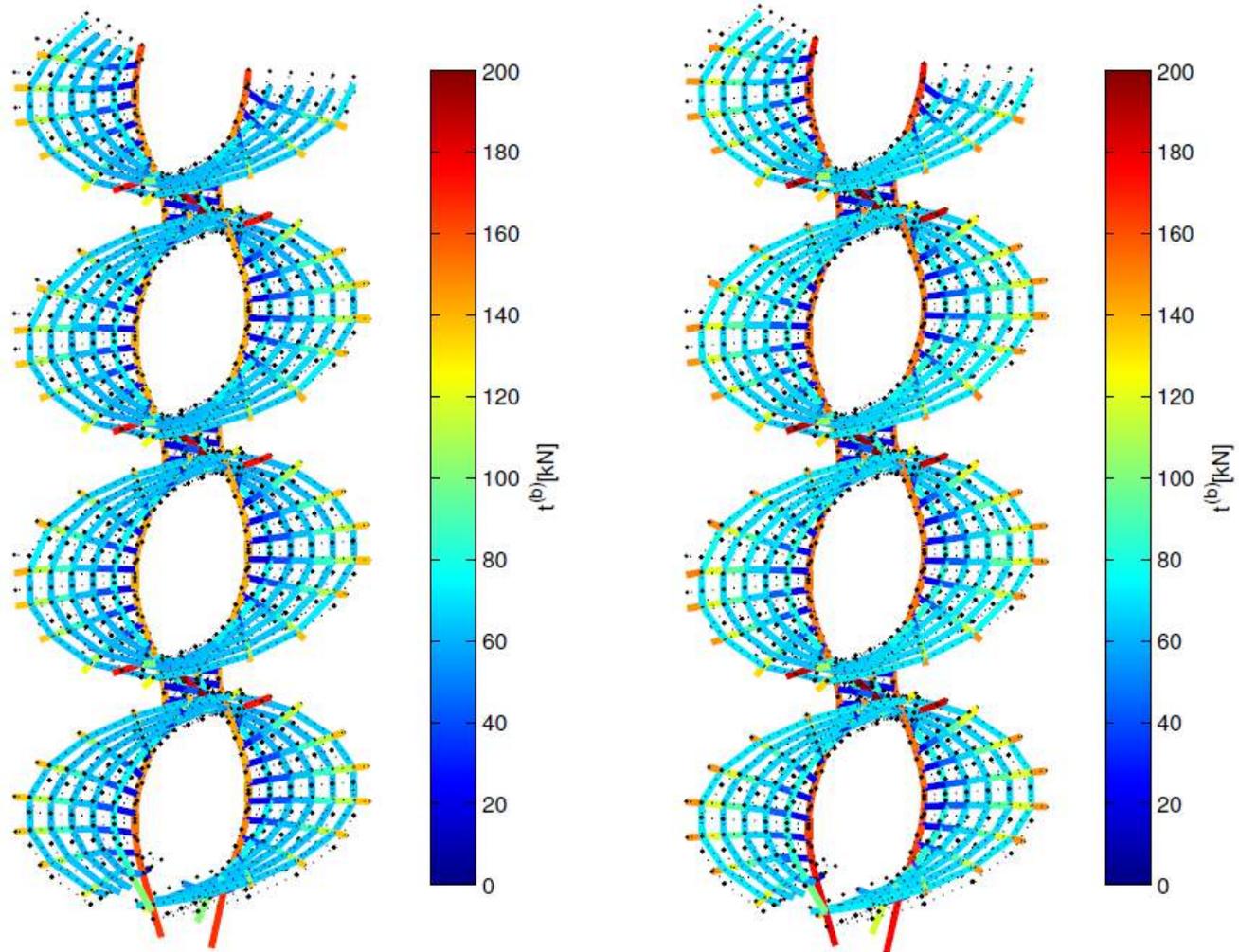
## Double helicoidal staircase (Doppelwendeltreppe) in Graz Castle



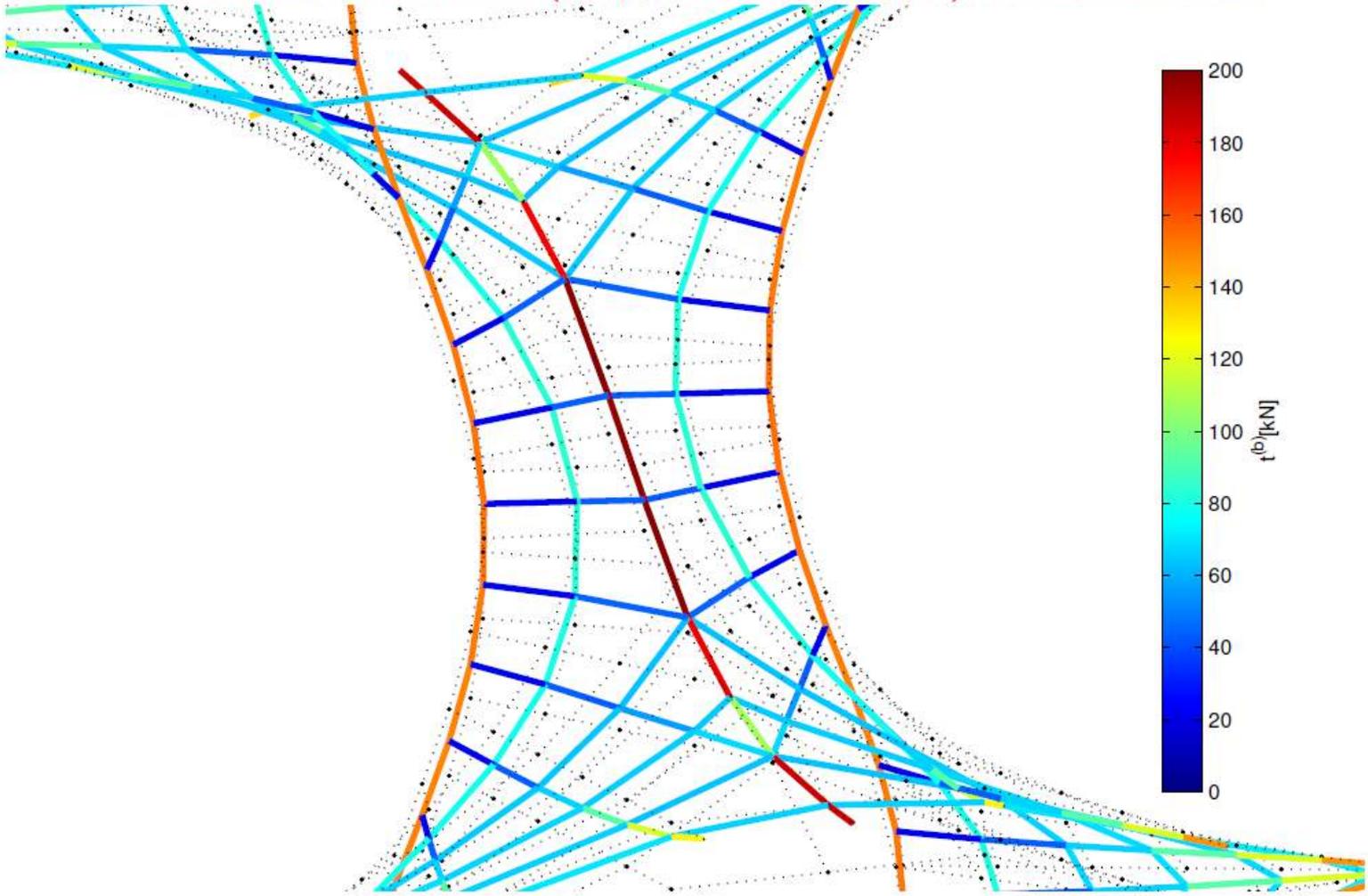
Stairs of reconciliation



## Double helicoidal staircase (Doppelwendeltreppe) in Graz Castle



## Double helicoidal staircase (Doppelwendeltreppe) in Graz Castle





**Grazie per l'attenzione!**